Esercizi su finita immergibilità, densità asintotiche, spessità, sindeticità (seconda parte)

Guglielmo Nocera

16 maggio 2015

Definizione 1. *Si dice che $A \leq_{fe} B$ (finitamente immergibile) se $\forall F \subset A$ finito $\exists x$ $F + x \subset B$.*

Esercizio 1. *A spesso, $A \leq_{fe} B \Longrightarrow B$ spesso. Più precisamente, A è massimale rispetto a $\leq_{fe}$ se e solo se è spesso.*

Dim. Per ogni intervallo I_n lungo n contenuto in A esiste x t.c. $I_n + x \subset B$. Quindi anche B "e spesso. Per la seconda affermazione, ogni insieme B può essere immerso finitamente in A spesso, dato che ogni suo sottoinsieme finito è contenuto in un intervallo di una certa lunghezza che ha un traslato in A; quindi, A è $\leq_{fe}$ −massimale. Viceversa, se A è massimale è anche spesso, dato che certamente $A \leq_{fe} \mathbb{N}$ e quindi per massimalità $\mathbb{N} \leq_{fe} A$, quindi A è spesso. □

Esercizio 2. *A AP-rich, $A \leq_{fe} B \Longrightarrow B$ AP-rich.*

Dim. Se A contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe, queste possono essere traslate in B mantenendosi tali, da cui la tesi. □

Esercizio 3. (1) *$A \leq_{fe} B \Longrightarrow BD(A) \leq BD(B)$.*

(2) *Non vale invece: $A \leq_{fe} B \Longrightarrow \overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$.*

Dim.

(1)
$$BD(A) = \lim_{k\to+\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+k]|}{k} \leq \lim_{k\to+\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|B \cap [x+1, x+k]|}{k}$$

dato che, a k fissato, se x realizza il massimo, $A \cap [x+1, x+k]$ è finito e dunque esiste y t.c. $B \cap [x+y+1, x+y+k]$ ha almeno la stessa cardinalità del precedente.

(2) L'insieme

$$A = \{2\} \cup \{4,5\} \cup [11,13] \cup \dots \cup [m+1,n] \cup [2n+1, 2n+n-m] \cup \dots$$

contiene intervalli arbitrariamente lunghi, quindi $\mathbb{N} \leq_{fe} A$, con $\overline{d}(\mathbb{N}) = 1$; ma $\overline{d}(A) \leq \frac{1}{2}$ perché ogni segmento aggiuntivo è immergibile nel buco immediatamente precedente.

□

Esercizio 4. (1) *A sindetico a tratti* $A \leq_{fe} B \Longrightarrow B$ *sindetico a tratti.*

(2) *Non vale invece: A sindetico,* $A \leq_{fe} B \Longrightarrow B$ *sindetico.*

<u>*Dim.*</u>

(1) Basta osservare che si può immergere in B la successione di intervalli bucati arbitrariamente lunghi contenuti A (la limitazione sui buchi di questi intervalli può solo migliorare).

(2) Vale ancora il controesempio dell'esercizio precedente: $\mathbb{N}$ è sindetico, ma A non lo è, dato che l'ampiezza dei buchi cresce arbitrariamente.

□

Esercizio 5. (1) *A spesso* $\iff \exists \mathcal{V}$ *non principale t.c.* $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_A$.

(2) *A sindetico* $\iff \forall \mathcal{V}$ *non principale* $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \cap \mathcal{O}_A \neq \varnothing$.

<u>*Dim.*</u>

(1)($\Longrightarrow$) Vogliamo mostrare che per un certo $\mathcal{V}$ vale $\forall \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}$ $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, cioè

$$\{n \in \mathbb{N} | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Scegliamo $\mathcal{V}$ come ultrafiltro generato da tutti i traslati di A. Esso esiste (ed è non principale) perché i traslati hanno la SPIF: infatti se per ogni k $A - m$ contiene intervalli lunghi k del tipo $[a_k - m + 1, b_k - m]$ mentre $A - n, n > m$, contiene intervalli lunghi k del tipo $[a_k - n + 1, b_k - n]$, allora per ogni $k > m - n$ i due intervalli hanno intersezione di cardinalità $k - (n - m)$. Quindi l'insieme $(A - n \cap A - m)$ deve essere infinito perché contiene sottoinsiemi di cardinalità arbitraria. Quindi esiste $\mathcal{V}$ come richiesto.

($\Longleftarrow$) Se vale l'ipotesi, poiché l'unico elemento comune a tutti gli ultrafiltri è $\mathbb{N}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ deve valere $A - n \in \mathcal{U}$, e quindi come sopra l'intersezione di due qualsiasi traslati deve essere infinita. Supponiamo per assurdo che A contenga intervalli di lunghezza al più k. Allora l'intersezione

$$A - 1 \cap A - 2 \cap \cdots \cap A - k - 2$$

è vuota. Infatti ogni intervallo perde, nel fare l'intersezione, almeno un punto per ogni traslato, e quindi bastano $k + 1$ intersezioni per ottenere il vuoto. Graficamente, per $k = 4$ (i '+' rappresentano gli elementi che restano nell'intersezione):

$$\begin{array}{llllll}
A - 1 & \dots & ++++ & ++++ & \dots \\
A - 2 & \dots & -+++ & -+++ & \dots \\
A - 3 & \dots & --++ & --++ & \dots \\
A - 4 & \dots & ---+ & ---+ & \dots \\
A - 5 & \dots & ---- & ---- & \dots
\end{array}$$

(2)($\Longrightarrow$) Se A è sindetico un numero finito di suoi traslati copre $\mathbb{Z}$. Per l'assioma di ultrafiltro, fissato $\mathcal{V}$ esiste un n t.c. $A - n \in \mathcal{V}$, e quindi se $\mathcal{U} = \bigsqcup_n$ si ha

$$\{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo A non sindetico e quindi A^c spesso. Allora per il punto (1) esiste $\mathcal{V}$ non principale t.c. $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_{A^c}$ che è disgiunto da $\mathcal{O}_A$, assurdo.