Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 4-5-11-12/5/2015

Definizione 0.1. *Data una famiglia* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *stabile per passaggio a sovrainsieme, si definisce* $\mathcal{F}^* := \{A : A \cap F \neq \emptyset \ \forall F \in \mathcal{F}\} = \{A : A^c \notin \mathcal{F}\}$.

Lemma 0.1.

- $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$.
- $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{F}^*$.
- $\bigcup \mathcal{F}^* = (\bigcup \mathcal{F})^*$.
- $\bigcap \mathcal{F}^* = (\bigcap \mathcal{F})^*$.

Esercizio 0.1. *Se* $\mathcal{U}$ *ultrafiltro, allora* $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}$. *Esiste una famiglia* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *stabile per sovrainsieme con* $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ *e* $\mathcal{F}$ *non ultrafiltro.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{U}$ ultrafiltro, allora $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{U}$ quindi $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}$. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che contengono almeno due elementi in $\{1, 2, 3\}$: tale famiglia è stabile per sovrainsieme e $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}$, quindi $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$; inoltre non è un ultrafiltro in quanto $\{1, 2\} \in \mathcal{F}$, $\{2, 3\} \in \mathcal{F}$ ma $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathcal{F}$. □

Definizione 0.2.

- *P si dice wPR (weakly Partition Regular) se è chiusa per sovrainsieme e per ogni partizione finita di $\mathbb{N}$, c'è una parte che sta in P.*
- *$P \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ si dice PR (Partition Regular) se è chiusa per sovrainsieme e per ogni partizione finita di ogni suo elemento, c'è una parte che sta in P.*

Lemma 0.2.

- *P è wPR $\Leftrightarrow$ P^* ha la FIP $\Leftrightarrow$ P contiene un ultrafiltro.*
- *P è PR $\Leftrightarrow$ P^* è un filtro $\Leftrightarrow$ P è unione di ultrafiltri.*

Definizione 0.3.

- *Data P PR, si definisce in $\beta\mathbb{N}$ il chiuso $C_P := \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq P\}$.*
- *Dato $\mathcal{F}$ filtro, si definisce in $\beta\mathbb{N}$ il chiuso $C_{\mathcal{F}} := \bigcap_{A \in \mathcal{F}} O_A = \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}\}$.*

- *Dato C chiuso in $\beta\mathbb{N}$, si definisce la famiglia PR* $P_C := \bigcup\limits_{\mathcal{U}\in C} \mathcal{U}$.
- *Dato C chiuso in $\beta\mathbb{N}$, si definisce il filtro* $\mathcal{F}_C := \bigcap\limits_{\mathcal{U}\in C} \mathcal{U}$.

Esercizio 0.2.

- *Data P PR e il corrispondente filtro P^*, vale $C_P = C_{P^*}$.*
- *Dato C chiuso in $\beta\mathbb{N}$, vale $(\mathcal{F}_C)^* = P_C$.*
- *Dato $\mathcal{F}$ filtro, $\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Data P PR, $P_{C_P} = P$.*
- *Dato C chiuso in $\beta\mathbb{N}$, $C_{\mathcal{F}_C} = C_{P_C} = C$.*

Dimostrazione.

- Si ha che $\mathcal{U} \subseteq P \Leftrightarrow [A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in P] \Leftrightarrow [A \notin P \Rightarrow A \notin \mathcal{U}] \Leftrightarrow [A^c \in P^* \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}] \Leftrightarrow P^* \subseteq \mathcal{U}$.
- $A \in P_C \Leftrightarrow A \in \bigcup \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \in C : A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists \mathcal{U} \in C : A^c \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \notin \bigcap \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}_C \Leftrightarrow A \in (\mathcal{F}_C)^*$
- $C_\mathcal{F}$ è l'insieme degli ultrafiltri che estendono $\mathcal{F}$, quindi $\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ è l'intersezione di tutti gli ultrafiltri che estendono $\mathcal{F}$: chiaramente tale intersezione contiene $\mathcal{F}$; inoltre se $A \notin \mathcal{F}$ allora trovo un ultrafiltro che estende $\mathcal{F}$ e non contiene A: infatti $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ ha la FIP, quindi si estende ad ultrafiltro.

  Ora $P_{C_P} = P \Leftrightarrow (P_{C_P})^* = P^*$ ma per quanto dimostrato sopra $(P_{C_P})^* = \mathcal{F}_{C_{P^*}} = P^*$ cioè la tesi.
- $\mathcal{F}_C$ è l'intersezione degli ultrafiltri contenuti in C, quindi $C_{\mathcal{F}_C}$ è l'insieme degli ultrafiltri che estendono l'intersezione di quelli contenuti in C; se $\mathcal{V}$ estende $\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in C} \mathcal{U}$ allora per ogni $A \in \mathcal{V}$ si ha $A^c \notin \mathcal{V}$ quindi $A^c \notin \bigcap\limits_{\mathcal{U}\in C} \mathcal{U}$ cioè esiste $\mathcal{U} \in C$ con $A^c \notin \mathcal{U}$ ovvero $\mathcal{U} \in O_A$ quindi O_A interseca C: quindi ogni intorno di $\mathcal{V}$ interseca C, cioè $\mathcal{V} \in \overline{C} = C$. Viceversa se ogni intorno di $\mathcal{V}$ interseca C allora per ogni $A \notin \mathcal{V}$ si ha $A^c \in \mathcal{V}$ quindi esiste $\mathcal{U} \in C$ con $A^c \in \mathcal{U}$ ovvero $A \notin \bigcap\limits_{\mathcal{U}\in C} \mathcal{U}$, quindi $\mathcal{V}$ estende $\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in C} \mathcal{U}$.

  In generale se $D \subseteq \beta\mathbb{N}$, considerare il filtro $\bigcap_{\mathcal{U}\in D} \mathcal{U}$ e prendere l'insieme degli ultrafiltri che estendono tale filtro equivale a fare la chiusura dell'insieme.

  Quindi $C_{\mathcal{F}_C} = C$.

  Usando quanto dimostrato sopra, $C_{P_C} = C_{(\mathcal{F}_C)^*} = C_{\mathcal{F}_C} = C$.

□

Definizione 0.4. $T_{A,\mathcal{U}} := \{n : A - n \in \mathcal{U}\}$.

Definizione 0.5. $A_\alpha := ({}^*A - \alpha) \cap \mathbb{N}$.

Definizione 0.6. $\bigsqcup_\alpha$ *è definito da* $A \in \bigsqcup_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in {}^*A$. *In un modello ultrapotenza* $\mathbb{N}^I/\mathcal{W}$ *questo equivale a dire* $\bigsqcup_\alpha = \alpha_*(\mathcal{W})$.

Lemma 0.3.

- $T_{A,\bigsqcup_\alpha} = A_\alpha$.
- $A \in \bigsqcup_\beta \oplus \bigsqcup_\alpha \Leftrightarrow \beta \in {}^*(A_\alpha)$.

Esercizio 0.3. *A spesso* $\Leftrightarrow$ *esiste* $\mathcal{V}$ *non principale con* $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq O_A$.

Dimostrazione. A spesso$\Leftrightarrow$ per ogni n vale $(A-1)\cap(A-2)\cap...\cap(A-n) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ la famiglia $\{A - n : n \in \mathbb{N}\}$ ha la FIP $\Leftrightarrow$ esiste un ultrafiltro non principale $\mathcal{V}$ che contiene $(A-n)$ per ogni $n \Leftrightarrow$ esiste $\mathcal{V}$ non principale con $T_{A,\mathcal{V}} = \mathbb{N} \Leftrightarrow$ esiste $\mathcal{V}$ non principale tale che per ogni $\mathcal{U}$ valga $T_{A,\mathcal{V}} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$ esiste $\mathcal{V}$ non principale con $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq O_A$.
Visione non standard: preso un modello non standard abbastanza ricco, vale: A spesso $\Leftrightarrow$ ${}^*A$ contiene un intervallo infinito $\Leftrightarrow$ esiste $\alpha \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ con $A_\alpha = \mathbb{N} \Leftrightarrow$ esiste $\alpha \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tale che per ogni $\beta \in {}^*\mathbb{N}$ valga $\beta \in {}^*(A_\alpha) \Leftrightarrow$ esiste $\bigsqcup_\alpha$ ultrafiltro non principale tale che per ogni ultrafiltro $\bigsqcup_\beta$ vale $\bigsqcup_\beta \oplus \bigsqcup_\alpha \in O_A \Leftrightarrow$ esiste $\mathcal{V}$ non principale con $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq O_A$. □

Esercizio 0.4. *A sindetico* $\Leftrightarrow$ *per ogni* $\mathcal{V}$ *non principale* $(\beta\mathbb{N}\oplus\mathcal{V})\cap O_A \neq \emptyset$.

Dimostrazione. A sindetico $\Leftrightarrow$ esiste n con $(A-1)\cup(A-2)\cup...\cup(A-n) = \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ ogni ultrafiltro non principale $\mathcal{V}$ contiene $(A - k)$ per qualche $k \leq n \Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{V}$ non principale si ha $T_{A,\mathcal{V}} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{V}$ non principale esiste $\mathcal{U}$ con $T_{A,\mathcal{V}} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{V}$ non principale si ha che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}$ interseca O_A. □

Esercizio 0.5. *Se* $a_{n+1} - a_n \to \infty$, *allora per ogni* $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ *non principali si ha* $A = \{a_1, a_2, ...\} \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Dato che $a_{n+1} - a_n \to \infty$ posso supporre a_n crescente (a meno di levare un numero finito di termini).
Se per assurdo $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ allora $\{n : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ ed essendo $\mathcal{U}$ non principale, esistono $x > y$ con $A-x \in \mathcal{V}$ e $A-y \in \mathcal{V}$, da cui $A-x\cap A-y \in \mathcal{V}$: ma $A-x\cap A-y$ è finito in quanto definitivamente $a_{n+1}-a_n > x-y$ e quindi $a_{n+1} - y > a_{n+1} - x > a_n - y$. Questo è assurdo perchè $\mathcal{V}$ non principale.
Visione non standard: preso un modello non standard abbastanza ricco, ogni ultrafiltro è della forma $\bigsqcup_\alpha$: vale $A \in \bigsqcup_\beta \oplus \bigsqcup_\alpha \Leftrightarrow \beta \in {}^*(A_\alpha)$ ma se α infinito, A_α è composto da al più un elemento in quanto in ${}^*A$ ogni elemento infinito dista dal successivo un numero infinito. Dunque avrei β infinito $\beta \in {}^*(A_\alpha) \subseteq \mathbb{N}$, assurdo. □

Esercizio 0.6. $(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})\oplus(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ *non è denso in nessun aperto di* $\beta\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Preso O_A aperto in $\beta\mathbb{N}$: se A è infinito, allora trovo un suo sottoinsieme $B=\{a_1,a_2,...\}$ con $a_{n+1}-a_n\to\infty$ e ho così trovato un aperto O_B contenuto in O_A che non interseca $(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})\oplus(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ (per l'esercizio precedente); se A è finito allora O_A consiste solo di ultrafiltri principali e $(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})\oplus(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ non contiene ultrafiltri principali, quindi è disgiunto da O_A. □

Definizione 0.7. $S_{A,\mathcal{U}}:=\{n:\frac{A}{n}\in\mathcal{U}\}$.

Definizione 0.8. $A\leq_{fe}B$ *se per ogni sottoinsieme finito* $\widetilde{A}\subseteq A$ *esiste* n *tale che* $\widetilde{A}+n\subseteq B$.

Definizione 0.9. $A\leq_{mfe}B$ *se per ogni sottoinsieme finito* $\widetilde{A}\subseteq A$ *esiste* n *tale che* $\widetilde{A}\cdot n\subseteq B$.

Lemma 0.4. *(In $(\beta\mathbb{N},\oplus)$) Sia* $I\subseteq\beta\mathbb{N}$ *e* $P_I:=\bigcup_{\mathcal{U}\in I}\mathcal{U}$*: valgono*

- I *ideale sinistro* $\Rightarrow[T_{A,P_I}\neq\emptyset\Rightarrow A\in P_I]\Rightarrow\overline{I}$ *ideale sinistro.*
- I *ideale destro* $\Rightarrow[A\in P_I\quad A\leq_{fe}B\Rightarrow B\in P_I]\Rightarrow\overline{I}$ *ideale destro.*

Dimostrazione.

- Se I ideale sinistro e $A-x\in\mathcal{U}_I$ per qualche $\mathcal{U}_I\in I$, allora $x\in T_{A,\mathcal{U}_I}$ cioè $A\in\bigsqcup_x\oplus\mathcal{U}_I$ che è un ultrafiltro di I perchè I ideale sinistro.

- Supponiamo $[T_{A,P_I}\neq\emptyset\Rightarrow A\in P_I]$ e prendiamo $\mathcal{V}\in\overline{I}$ e $\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}$: la tesi è mostrare che $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\in\overline{I}$: preso un suo intorno O_A, cioè $A\in\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$, si ha $T_{A,\mathcal{V}}\in\mathcal{U}$ quindi $T_{A,\mathcal{V}}\neq\emptyset$, quindi $A-x\in\mathcal{V}$; ma essendo $\mathcal{V}\in\overline{I}$ e O_{A-x} intorno di $\mathcal{V}$, esiste $\mathcal{W}_I\in I$ con $A-x\in\mathcal{W}_I$ da cui $T_{A,P_I}\neq\emptyset$: quindi $A\in\mathcal{U}_I$ per qualche $\mathcal{U}_I\in I$. Dunque ogni intorno di $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$ interseca I, da cui $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\in\overline{I}$.

- Se I ideale destro, $A\in P_I$ e $A\leq_{fe}B$ allora $A\in\mathcal{U}_I$ per qualche $\mathcal{U}_I\in I$: dato che $A\leq_{fe}B$ la famiglia $\{B-a:a\in A\}$ ha la FIP (comunque presi $a_1,...,a_k$ esiste x con $x+a_1,x+a_2,...,x+a_k\in B$ cioè $x\in(B-a_1)\cap...\cap(B-a_k)$). Quindi tale famiglia si estende ad ultrafiltro $\mathcal{V}$ e $T_{B,\mathcal{V}}\supseteq A\in\mathcal{U}_I$ da cui $B\in\mathcal{U}_I\oplus\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}_I\oplus\mathcal{V}\in I$ perchè I ideale destro, quindi $B\in P_I$.

- Supponiamo $[A\in P_I\quad A\leq_{fe}B\Rightarrow B\in P_I]$ e prendiamo $\mathcal{V}\in\overline{I}$ e $\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}$: la tesi è $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\in\overline{I}$: sia O_A un intorno di $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$, cioè $T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{V}$: allora $O_{T_{A,\mathcal{U}}}$ è un intorno di $\mathcal{V}$ quindi esiste $\mathcal{V}_I\in I$ con $T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{V}_I$ cioè $T_{A,\mathcal{U}}\in P_I$; ma $T_{A_\mathcal{U}}\leq_{fe}A$ quindi $A\in P_I$ cioè O_A interseca I. Quindi $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\in\overline{I}$.

□

Lemma 0.5. *(In $(\beta\mathbb{N}, \odot)$) Sia $I \subseteq \beta\mathbb{N}$ e $P_I := \bigcup_{\mathcal{U} \in I} \mathcal{U}$: valgono*

- *I ideale sinistro $\Rightarrow [S_{A,P_I} \neq \emptyset \Rightarrow A \in P_I] \Rightarrow \overline{I}$ ideale sinistro.*
- *I ideale destro $\Rightarrow [A \in P_I \quad A \leq_{mfe} B \Rightarrow B \in P_I] \Rightarrow \overline{I}$ ideale destro.*

Dimostrazione. Del tutto analoga a quella del lemma precedente. □

Esercizio 0.7. *$vdW := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in \mathcal{U} \quad A$ è AP-rich$\}$.*

- *vdW è chiuso.*
- *vdW è un ideale bilatero in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.*
- *vdW è un ideale bilatero in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.*

Dimostrazione.

- vdW è chiuso perchè è l'insieme degli ultrafiltri contenuti in una famiglia PR: infatti la famiglia degli AP-rich è PR per il teorema di van der Waerden.
- $P_{vdW} = \{A : A$ è AP-rich$\}$. Per il lemma precedente (ed essendo vdW chiuso) basta verificare che (i) [A AP-rich $\Rightarrow A + x$ AP-rich] e (ii) [A AP-rich e $A \leq_{fe} B \Rightarrow B$ AP-rich]. La (i) è ovvia. Per la (ii), se A contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe, allora per definizione di $\leq_{fe}$ queste si immergono per traslazione in B, quindi anche B è AP-rich.
- Analoga al punto precedente. Anche per $\leq_{mfe}$ si conserva il fatto di essere AP-rich.

□

Esercizio 0.8. *$\overline{d} := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in \mathcal{U} \quad \overline{d}(A) > 0\}$.*

- *$\overline{d}$ è chiuso.*
- *$\overline{d}$ è un ideale sinistro ma non destro in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.*

Dimostrazione.

- $\overline{d}$ è chiuso perchè è l'insieme degli ultrafiltri contenuti in una famiglia PR: infatti data una partizione in n parti di un insieme A con $\overline{d}(A) = \alpha > 0$, almeno una delle parti ha densità superiore almeno $\frac{\alpha}{n}$.

- $P_{\overline{d}} = \{A : \overline{d}(A) > 0\}$. Per il lemma precedente (ed essendo $\overline{d}$ chiuso) basta verificare che (i) $[\overline{d}(A) > 0 \Rightarrow \overline{d}(A + x) > 0]$ e (ii) $[\overline{d}(A) > 0$ e $A \leq_{fe} B \not\Rightarrow \overline{d}(B) > 0]$. La (i) è ovvia. Per la (ii) basta prendere $A = \mathbb{N}$ e $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [2^n, 2^n + n]$.

$\square$

Esercizio 0.9. $\Delta := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in \mathcal{U} \quad BD(A) > 0\}$.

- Δ *è chiuso.*
- Δ *è un ideale bilatero in* $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.
- Δ *è un ideale sinistro ma non destro in* $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.

Dimostrazione.

- Δ è chiuso perchè è l'insieme degli ultrafiltri contenuti in una famiglia PR: per ogni colorazione con n colori di un insieme A con $BD(A) = \alpha > 0$, almeno uno dei colori ha densità di banach almeno $\frac{\alpha}{n}$.
- $P_\Delta = \{A : BD(A) > 0\}$. Per il lemma precedente (ed essendo Δ chiuso) basta verificare che (i) $[BD(A) > 0 \Rightarrow BD(A + x) > 0]$ e (ii) $[BD(A) > 0$ e $A \leq_{fe} B \Rightarrow BD(B) > 0]$. La (i) è ovvia. La (ii) è vera perchè ogni configurazione finita di A si trova anche in B, quindi $BD(A) \leq BD(B)$.
- Bisogna verificare che (i) $[BD(\frac{A}{x}) > 0 \Rightarrow BD(A) > 0]$ e (ii) $[BD(A) > 0$ e $A \leq_{mfe} B \not\Rightarrow BD(B) > 0]$. Per la (i) si ha che $BD(A) \geq \frac{BD(\frac{A}{x})}{x}$ dato che se in $\frac{A}{x}$ trovo un tratto con una certa densità, vuol dire che A contiene nel dilatato di quel tratto almeno i dilatati degli elementi di A (con dilatare intendo moltiplicare per x). Per la (ii) basta prendere $A = \mathbb{N}$ e $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{2^{n^2}, 2 \cdot 2^{n^2}, 3 \cdot 2^{n^2}, ..., 2^{2n+1} \cdot 2^{n^2}\}$: in questo modo per ogni insieme finito $F \subseteq \mathbb{N}$, $F \cdot 2^{\max F} \subseteq B$; inoltre $BD(B) = 0$ perchè (detta $\mu_I(B) := \frac{|B\cap I|}{|I|}$) vale, preso $k \geq M2^{n^2}$, $\mu_{[a,a+k)}(B) = \frac{\left|B\cap[a,a+2^{n^2})\right| + \left|B\cap[a+2^{n^2},a+k)\right|}{k} \leq \frac{2^{n^2}}{k} + \frac{k-2^{n^2}}{k}\frac{1}{2^{n^2}} \leq \frac{1}{M} + \frac{1}{2^{n^2}} \to 0$.

$\square$