Esercizi lezione 4/5/15, Andrea Vaccaro

15 maggio 2015

Proposizione 0.1. *A è spesso se e solo se esiste un ultrafiltro non principale V tale che $U \oplus V \in \mathcal{O}_A$ per ogni $U \in \beta\mathbb{N}$.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$. Sia V non principale come in ipotesi. Dire che $A \in U \oplus V$ per ogni U equivale a dire che $\hat{A} = \{n : A - n \in V\}$ è in ogni ultrafiltro di $\mathbb{N}$, cioè deve coincidere con $\mathbb{N}$ stesso, poiché dato un qualunque sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ posso considerare un ultrafiltro che ne contiene il complementare. Questo significa allora che $\{m : m + n \in A\} \in V$ per ogni n. Per mostrare che A contiene un intervallo lungo n, considero $A - 1, A - 2, \cdots, A - (n+1)$; tutti questi insiemi sono in V, dunque anche la loro intersezione, che è pertanto non vuota. Sia a in tale intersezione, ma allora l'intervallo $[a + 1, a + n + 1] \subseteq A$, poiché $a + i \in A$ per ogni $1 \leq i \leq n + 1$. Poiché questo vale per ogni n, A deve essere spesso.

$\Rightarrow$. Sia A spesso. Se riusciamo a mostrare che dati $A - n_1, A - n_2, \cdots, A - n_i$ questi hanno intersezione non vuota e infinita, allora abbiamo concluso, perché ciò significa che, chiamando $F = \{[n, +\infty] : n \in \mathbb{N}\}$, allora $F \cup \{A - n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, infatti finiti elementi in F hanno sempre come intersezione un elemento stesso di F (per la precisione il più piccolo fra quelli considerati), e ogni insieme infinito ha sempre intersezione non nulla con ogni elemento di F. Fatte queste considerazioni, esiste un ultrafiltro V che estende tale famiglia, che dunque è non principale, poiché per ogni insieme finito esiste N abbastanza grande tale $[N, +\infty]$ sia disgiunto da l'insieme finito stesso. A questo punto segue che $\hat{A} = \{n : A - n \in V\} = \mathbb{N}$ e la tesi segue.

Consideriamo allora $A - n_1, \cdots, A - n_i$ tali che $n_1 < \cdots < n_i$ e chiamiamo $n_i = M$. Dire che A è spesso, permette non solo di trovare intervalli arbitrariamente lunghi in A stesso, ma anche di trovarli distinti fra loro e disgiunti: cioè esiste una famiglia di intervalli disgiunti $I_n \subseteq A$ tali per cui $|I_n| = n$. Consideriamo tutti gli I_n tali per cui $n > M$. Se $I_n = [a_n, b_n]$ per tali n, allora ovviamente $a_n + n_j \in A$ per ogni $1 \leq j \leq i$, quindi $a_n \in \bigcap_{1 \leq j \leq i} A - n_j$ per ogni $n > M$. Con la richiesta fatta sugli I_n (in particolar modo che siano disgiunti, quindi $a_n \neq a_m$ se $n \neq m$), abbiamo così trovato infiniti elementi in $\bigcap_{1 \leq j \leq i} A - n_j$, come voluto. $\square$

Proposizione 0.2. *A sindetico se e solo se per ogni V non principale allora esiste $U \in \beta\mathbb{N}$ tale che $A \in U \oplus V$.*

Dimostrazione. Sfruttiamo l'esercizio precedente congiuntamente al fatto che A è sindetico se e solo se A^c è non spesso. Vale dunque che A è sindetico se e solo se A^c è non spesso se e solo se non esiste V principale tale che per ogni $U \in \beta\mathbb{N}$ valga $A^c \in U \oplus V$, ciò significa che per ogni V non principale esiste un U tale che $A^c \notin U \oplus V$, ovvero $A \in U \oplus V$, dunque segue la tesi. $\square$

Proposizione 0.3. *Mostrare che:*

i) $\Delta = \{U \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in U BD(A) > 0\}$ *è un ideale bilatero,*

ii) $\mathcal{W} = \{U \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in U A$ *è AP-rich*$\}$,

iii) Δ *è un ideale sinistro di* $(\beta\mathbb{N}, \otimes)$,

iv) $\overline{d} = \{U \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in U \overline{d}(A) > 0\}$ *è ideale sinistro ma non destro di* $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.

Dimostrazione. $i)$.

Sia $U \in \Delta$ e $V \in \beta\mathbb{N}$. Verifichiamo prima che Δ è un ideale sinistro: vale che $A \in V \oplus U$ se e solo se $\hat{A} = \{n : A - n \in U\} \in V$. Se $A \in V \oplus U$, allora esiste un n tale che $A - n \in U$, quindi $BD(A - n) > 0$, il che ovviamente implica che $BD(A) > 0$.

Per mostrare invece che Δ è un ideale destro, utilizziamo il fatto che per ogni $W \in \beta\mathbb{N}$ esiste un $\gamma \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $W = \sqcup_\gamma$. Quindi si avrà $U = \sqcup_\alpha$ e $V = \sqcup_\beta$, quindi $A \in U \oplus V = \sqcup_\alpha \oplus \sqcup_\beta$ se e solo se $\hat{A} = \{n : A - n \in \sqcup_\beta\} = \{n : \beta + n \in {}^*A\} \in \sqcup_\alpha$. Per ipotesi vale che $BD(\hat{A}) > 0$, ma poiché $\beta + \hat{A} \subseteq {}^*A$, allora $\hat{A} \leq_{fe} A$, il che implica $BD(A) \geq BD(\hat{A}) > 0$, e dunque segue la tesi.

$ii)$. Sia $U \in \mathcal{W}$ e $V \in \beta\mathbb{N}$. Verifichiamo prima che $\mathcal{W}$ è un ideale sinistro: vale che $A \in V \oplus U$ se e solo se $\hat{A} = \{n : A - n \in U\} \in V$. Se $A \in V \oplus U$, allora esiste un n tale che $A - n \in U$, quindi $A - n$ è AP-rich, e quindi anche A lo è (semplicemente basta traslare in avanti di n le progressioni aritmetiche trovate in $A - n$).

Per mostrare che $\mathcal{W}$ è un ideale destro, come nel punto precedente si avrà $U = \sqcup_\alpha$ e $V = \sqcup_\beta$, quindi $A \in U \oplus V = \sqcup_\alpha \oplus \sqcup_\beta$ se e solo se $\hat{A} = \{n : A - n \in \sqcup_\beta\} = \{n : \beta + n \in {}^*A\} \in \sqcup_\alpha$. Per ipotesi vale che $\hat{A}$ è AP-rich, ma poiché $\beta + \hat{A} \subseteq {}^*A$, allora $\hat{A} \leq_{fe} A$, il che implica che anche A lo sia, per un esercizio svolto precedentemente.

$iii)$.

Sia $V \in \Delta$ e $U \in \beta\mathbb{N}$. Se $A \in U \otimes V$, che equivale a $\{n : A/n \in V\} \in U$, allora esiste un n tale che $A/n \in V$, quindi $BD(A/n) > 0$. Vale che $a_k = \max_{x\in\mathbb{N}}|A/n \cap [x+1, x+k]| \leq \max_{x\in\mathbb{N}}|A \cap [nx+n, nx+nk]| \leq \max_{x\in\mathbb{N}}|A \cap [x+1, x+(n-1)k]| = b_{(n-1)k}$ dove la prima disuguaglianza vale per definizione di A/n. Ma allora vale che $\frac{a_k}{k} \leq \frac{b_{(n-1)k}}{k}$, ma allora, se faccio tendere k all'infinito ottengo $BD(A) \geq \frac{1}{n-1} BD(A/n) > 0$, e quindi $U \otimes V \in \Delta$ come voluto.

$iv)$. Sia $V \in \overline{d}$ e $U \in \beta\mathbb{N}$; se $A \in U \oplus V$, ovvero $\{n : A - n \in V\} \in U$, allora esiste n tale che $\overline{d}(A - n) > 0$. Dal momento che $a_m = |(A - n) \cap [1, m]| \leq |A \cap [1, m + n]| = b_{m+n}$ si verifica che $\frac{a_m}{m} \leq \frac{b_{n+m}}{m}$; si ricava perciò che $\frac{b_{n+m}}{n+m} \geq \frac{a_m}{m}\frac{m}{n+m}$. Mandando m all'infinito, il valore $\frac{m}{m+n}$ tende ad 1, e quindi si ottiene $\overline{d}(A) \geq \overline{d}(A - n) > 0$, e quindi $\overline{d}$ è un ideale sinistro.

Viceversa, se prendo $A \in U \in \overline{d}$ vale $\overline{d}(A) > 0$, poiché esistono insiemi spessi B tali che $\overline{d}(B) = 0$, e dal momento che nonostante $A \leq_{fe} B$ non valga $\overline{d}(B) > 0$, segue che $\overline{d}$ non può essere un ideale destro. □

Proposizione 0.4. *Dato I ideale sinistro minimale, allora per ogni $y \in X$ vale che $I * y$ è un ideale minimale, inoltre per ogni ideale minimale J esiste un $y \in X$ tale che $J = I * y$.*

Dimostrazione. Un ideale H sinistro è minimale se e solo se $\forall y \in H$ vale $X * y = H$. Consideriamo allora $y \in X$ e osserviamo l'ideale sinistro $I * y$ (il fatto che sia un ideale segue dal fatto che I lo è e dall'associatività del prodotto), che chiameremo G. Se ora consideriamo $x \in G$, vale che $x = i * y$ con $i \in I$, ma allora $X * x = X * i * y = I * y = G$ dove la seconda uguaglianza vale poiché I è ideale sinistro minimale. Segue dunque anche G lo è.

Sia ora J ideale sinistro minimale, preso $j \in J$ vale che $X * j = J$, ma quindi, dal momento che $I \subseteq X$, vale che $I * j \subseteq J$; per associatività anche $I * j$ è un ideale sinistro, ma allora per minimalità di J deve valere $I * j = J$, e segue quindi la tesi. $\square$