Esercizi sulle proprietà logiche di $\beta\mathbb{N}$: preordine di Rudin-Keisler e ultrafiltri di Ramsey

Guglielmo Nocera

15 maggio 2015

Definizione 1 (Preordine di Rudin-Keisler)**.** *Si dice che* $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ *se esiste una funzione* f *da* $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{N}$ *t.c.* $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ *(nel senso che* $A \in \mathcal{U}$ *se e solo se* $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$*). Si dice che* $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ *se esiste una bigezione* σ *di* $\mathbb{N}$ *t.c.* $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$*.*

Esercizio 1. $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U} \iff \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$

Lemma 1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *Allora* $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \iff F = \{n | f(n) = n\} \in \mathcal{U}$*, ovvero* $f \equiv_{\mathcal{U}} id_{\mathbb{N}}$*.*

<u>*Dim.*</u>

($\Longrightarrow$) Se così non fosse avremmo che

$$X = F^c = \{n | f(n) \neq n\} \in \mathcal{U},$$

ma allora per il teorema dei tre colori esiste una partizione

$$X = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$$

t.c. $x \in C_i \Longrightarrow f(x) \notin C_i$. Però $\exists i$ t.c. $C_i \in \mathcal{U}$ laddove $C_j \notin \mathcal{U} \forall j \neq i$. Quindi $f(C_i)$ è disgiunto da C_i, il che è assurdo perché $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ e se $C_i \in \mathcal{U}$ anche $f(C_i) \in U$.

($\Longleftarrow$) $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$. Infatti se $A \in \mathcal{U}$, $A \cap F \in \mathcal{U}$ e quindi $f(A \cap F) \in \mathcal{U}$, dato che $f(A \cap F) = A \cap F$. Ma $f(A \cap F) \subset f(A)$ che quindi sta in $\mathcal{U}$. Viceversa, se $B \in \mathcal{U}$ allora $B \cap F \in \mathcal{U}$, quindi $B^c \cap F \notin \mathcal{U}$, quindi poiché $A^c \cap F \subseteq B^c \cap F$ vale che $A^c \cap F \notin \mathcal{U}$, da cui $A \cap F \in \mathcal{U}$ e quindi $A \in \mathcal{U}$. $\square$

<u>*Dim.*</u> (***Esercizio 1***). L'implicazione da destra a sinistra è evidente, dato che basta considerare σ e σ^{-1}. Dimostriamo l'altra. Supponiamo che esistano

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \ g(\mathcal{V}) = \mathcal{U}.$$

Allora

$$gf(\mathcal{U}) = \mathcal{U},$$

per cui

$$gf \equiv_{\mathcal{U}} id_{\mathbb{N}},$$

ovvero esiste $F \in \mathcal{U}$ t.c. $gf|_F = id_A$. Quindi $f|_F$ è iniettiva. Costruiamo una bigezione di $\mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$\sigma(n) = f(n) \qquad \forall n \in F$$

e poiché f è una iniettiva, $|F^c| = |f(F)^c|$ e quindi esiste una bigezione χ fra i complementari; sia quindi $\sigma|_{F^c} = \chi$. Verifichiamo che σ induce un isomorfismo fra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Per ogni $A \in \mathcal{U}$ vale

$$\sigma(A) \supset \sigma(A \cap F) = f(A \cap F) \in \mathcal{V}$$

per l'ipotesi su f (dato che $A \cap F \in \mathcal{U}$), e viceversa per ogni $B \in \mathcal{V}$

$$\sigma^{-1}(B) \supset \sigma^{-1}(B \cap f(F)) = f^{-1}(B \cap f(F)) \in \mathcal{U}$$

per l'ipotesi su g. $\square$

Lemma 2. *$\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Per ogni $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $g(\mathcal{U})$ è ancora un ultrafiltro su $Im\ g$.*

Dim.

- $\varnothing \notin g(\mathcal{U})$;
- $A \subseteq B \subseteq Im\ g$, $A \in g(\mathcal{U}) \Longrightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{U} \Longrightarrow B \in g(\mathcal{U})$ perché è inclusa in $Im\ g$;
- $A, B \in g(\mathcal{U}) \Longrightarrow g^{-1}(A \cap B) \supseteq g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \in \mathcal{U} \Longrightarrow g^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{U} \Longrightarrow (A \cap B) \in g(\mathcal{U})$.
- $Im\ g \setminus A \notin g(\mathcal{U}) \Longrightarrow g^{-1}(Im\ g \setminus A) \notin \mathcal{U} \Longrightarrow (g^{-1}(A))^c \notin \mathcal{U} \Longrightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Longrightarrow A \in g(\mathcal{U})$

$\square$

Esercizio 2. *$f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Allora*

- *$f \equiv_{\mathcal{U}} g \Longrightarrow f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$*
- *se f è iniettiva, $f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U}) \Longrightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} g$*

<u>*Dim.*</u>

- Considerando il risultato del *Lemma 2*, è esattamente analoga alla dimostrazione della prima implicazione del *Lemma 1*.
- Necessariamente $Im\ g = Im\ f$, dato che $f(\mathbb{N}) \in g(\mathcal{U})$ e quindi per inclusioni $f(\mathbb{N}) = Im\ g$. Quindi se f è iniettiva esiste

$$\varphi : Im\ g \longrightarrow \mathbb{N}\ t.c.$$

$$\varphi \circ f = id_{\mathbb{N}}$$

e quindi

$$\mathcal{U} = \varphi g(\mathcal{U})$$

ovvero

$$\varphi g \equiv_{\mathcal{U}} id_{\mathbb{N}}$$

cioè

$$\{n | \varphi g(n) = n\} \in \mathcal{U}$$

$$\{n | g(n) = f(n)\} \in \mathcal{U}$$

cioè $f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

Esercizio 3. *Per un ultrafiltro non principale sono equivalenti:*

(1) $\mathcal{U}$ *è RK-minimale in* $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$*, ovvero per ogni* $\mathcal{V}$ *non principale t.c.* $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ *allora* $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$.

(2) $\mathcal{U}$ *è selettivo, cioè se* $\mathbb{N} = \bigcup_1^{\infty} A_i$ *è una partizione t.c.* $A_i \notin \mathcal{U}\ \forall i$ *allora* $\exists X \in \mathcal{U}$ *selettivo, cioè t.c.* $X \cap A_i$ *ha esattamente un elemento. (Si può sempre supporre l'unione disgiunta, dato che* $A \notin \mathcal{U}, B \notin \mathcal{U} \Longrightarrow A \cap B \notin \mathcal{U}$.

(3) $\forall f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ \exists A \in \mathcal{U}$ *t.c.* $f|_A$ *è costante oppure* $f|_A$ *è iniettiva.*

(4) *L'ultrapotenza* ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \big/ \mathcal{U}$ *è in realtà*

$$\{[f]_{\mathcal{U}} | f \text{ costante oppure bigezione}\}$$

(5) *Se* $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \big/ \mathcal{U}$ *è un infinitesimo positivo, allora esiste* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *monotona infinitesima t.c.* $[f]_{\mathcal{U}} = \varepsilon$

(6) *Ogni* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *è* $\mathcal{U}-$*equivalente ad una* g *non decrescente*

(7) $\mathcal{U}$ *è di Ramsey, cioè per ogni* $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ *esiste* $H \in \mathcal{U}$ *t.c.* $[H]^2$ *è monocromatico.*

Dim.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3) Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Abbiamo visto (*Lemma 2*) che $f(\mathcal{U})$ è ancora un ultrafiltro su $Im\ f$. Se è principale esiste $\{i\} \in \mathcal{V}$, quindi $A = f^{-1}(i) \in \mathcal{U}$ e $f|_A$ è costante. Altrimenti, avendosi $f(\mathcal{U}) \leq_{RK} \mathcal{U}$, deve essere $\mathcal{U} \cong f(\mathcal{U})$, quindi esiste $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.c. $g(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Ma allora, come nella dimostrazione dell'*Esercizio 1*, esiste A t.c. $f|_A$ è iniettiva.
Viceversa, se $\mathcal{U} \geq_{RK} \mathcal{V}$ con l'applicazione f ed $\exists A \in \mathcal{U}$ t.c. $f|_A$ è costante, allora $\mathcal{V}$ è principale, mentre se $f|_A$ è iniettiva, ancora con riferimento all'*Esercizio 1*, si costruisce un isomorfismo fra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) Se f non è costante quasi ovunque è iniettiva su un insieme $A \in \mathcal{U}$ e dunque è equivalente ad una bigezione: basta infatti partizionare A in due sottoinsiemi B e C entrambi infiniti, e supponendo $C \in \mathcal{U}$ costruire una bigezione (in maniera arbitraria) fra $A^c \cup B$ e $f(B)$, ottenendo una nuova funzione g bigettiva e $\mathcal{U}-$equivalente a f.
Il viceversa è immediato.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Consideriamo

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(i).$$

Se esiste i t.c. $f^{-1}(i) \in \mathcal{U}$ allora $f|f^{-1}(i)$ è costante, altrimenti esiste l'elemento selettivo X e $f|_X$ è necessariamente iniettiva.
Viceversa, sia

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, A_i \notin \mathcal{U}\ \forall i.$$

Allora la funzione

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} i\ \chi_{A_i}$$

è ben definita per disgiunzione degli A_i (tutti i termini sono nulli tranne uno), e deve esistere $A \in \mathcal{U}$ t.c. $f|_A$ è costante (impossibile dato che in tal caso avremmo $A \subseteq A_i$ per un qualche i e quindi $A_i \in \mathcal{U}$) oppure iniettiva, e quindi esiste l'elemento selettivo, dato che $|A \cap A_i| \leq 1$ $\forall i$ e A può essere completato (rimanendo quindi in $\mathcal{U}$) in modo che $|A \cap A_i| = 1$ $\forall i$.

$(3+2) \Longrightarrow (6)$ Se f non è costante q.o. (che darebbe immediatamente la tesi) sappiamo che esiste $A \in \mathcal{U}$ t.c. f è iniettiva su A. Per ogni $k \in Im\ f$ sia $n_k = \min(f^{-1}(k))$, e sia $\Lambda_k = \{m \geq n_k, m \in A | f(m) < k\}$. Poiché $f|_A$ è iniettiva, ogni Λ_n è finito e dunque non sta nell'ultrafiltro. Inoltre i Λ_k ricoprono $\mathbb{N}$. Per (2) esiste $B \in \mathcal{U}$ t.c. $|B \cap \Lambda(k)| = 1$ $\forall k$ (e possiamo supporre $B \subset A$). Allora, se $B = \{x_1 < x_2 < \dots\}$, per ogni x_k in B vale $f(x_{k+1}) > f(x_{k+1})$, perché altrimenti $x_{k+1} \in \Lambda) f(x_k)$ e quindi $|B \cap \Lambda(k)| \geq 2$. Quindi $f|_B$ è crescente e può essere completata costante a tratti ad una funzione non decrescente su tutto $\mathbb{N}$.

$(3+6) \Longrightarrow (5)$ Certamente, se $\varepsilon = \langle f(n) \rangle$, f non è costante q.o. a meno che non sia q.o. nulla. Se non si verifica quest'ultimo caso consideriamo la funzione $\lfloor \frac{1}{f(n)} \rfloor$ (ristretta all'insieme di su cui f non si annulla, che appartiene all'ultrafiltro): tale funzione, non essendo costante q.o., è iniettiva su un insieme $A \in \mathcal{U}$, e per (6) è anche monotona. Quindi le $\frac{1}{f(n)}$ hanno parti intere strettamente crescenti su A, quindi le $f(n)$ sono strettamente decrescenti su A; ponendo $\sigma = f$ su A e completandola costante a tratti altrove si ottiene la tesi.

$(5) \Longrightarrow (6)$ Se f non è costante quasi ovunque, allora non è limitata, quindi corrisponde ad una successione infinita, ovvero ad un infinito di $^*\mathbb{N}$. Sia ora $y_n = \frac{1}{f(n)}$ (e arbitraria sull'insieme trascurabile in cui f si annulla). Tale successione rientra nelle ipotesi di (5), dato che $f(n)$ è $\mathcal{U}-$infinita, e dunque è equivalente ad una successione monotona infinitesima (che prende gli stessi valori $\frac{1}{f(n)}$ quasi ovunque). Dunque, tornando indietro (e si può appunto perché quasi ovunque i valori vengono conservati), f è equivalente ad una monotona infinita, cioè non decrescente. Viceversa, se $\varepsilon = \langle f(n) \rangle$ e f non è costante q.o., consideriamo la funzione $\lfloor f(n) \rfloor$

$(6) \Longrightarrow (3)$ Per ipotesi sappiamo che esiste $B \in \mathcal{U}$ t.c. $f|_B$ è debolmente crescente, ovvero è costante su blocchi finiti della forma $[n_k, n_{k+1}] \cap B$, oppure è definitivamente costante (nel qual caso f è costante su un sottoinsieme cofinito di B che sta necessariamente in $\mathcal{U}$). Nel primo caso, invece, consideriamo la funzione

$$g(i) = x_{k+1} + x_k - i.$$

Essa è strettamente decrescente su ogni blocco, e deve essere equivalente ad una $\overline{g}$ debolmente crescente. Dunque esiste $C \in \mathcal{U}$ t.c. $g|_C = \overline{g}|C$. Considerando

$A = C \cap B$ osserviamo che A non può contenere due elementi dello stesso intervallo, dato che g è strettamente decrescente su ogni intervallo. Quindi A contiene al più un elemento per ogni intervallo e dunque $f|A$ è iniettiva.

(2) $\Longrightarrow$ (7) (*Variazione su una dimostrazione di Thomas Jech,* Set Theory) Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema di Ramsey infinito si arriva ad affermare che, data una partizione

$$\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_n$$

esiste $B = C_i$ in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Vogliamo, come in quel caso, costruire H t.c. $[H]^2 \subseteq B$, ma in più richiediamo che $H \in \mathcal{U}$. Dette B_i le sezioni di B, abbiamo che $B_i \in \mathcal{U}$ quasi ovunque, diciamo per $i \in \hat{B} \in \mathcal{U}$. Definiamo ora $D_0 = \mathbb{N}$ e $D_i, i \geq 1$ come $\bigcap_{j \leq i} B_j$ se $i \in \hat{B}$ e come $D_k,\ k = \min(j \geq i, j \in \hat{B})$ altrimenti. Allora la famiglia D_i è una catena discendente di insiemi di $\mathcal{U}$. Ma poiché $\mathcal{U}$ è selettivo (v. oltre) si riesce a trovare una successione h_n t.c. $\{h_1 < h_2 < \dots\} \in \mathcal{U}$ e $h_{i+1} \in B_{h_i}$ per ogni $i \geq 1$, ovvero tale che

$$h_i \in \bigcap_{j<i} B_j,$$

cioè $(h_i, h_j) \in B\ \forall i < j$, che è quel che vogliamo.

Ora, perché la proprietà di selettivo implica l'esistenza della successione (h_i)? Si sfrutta il fatto che, poiché ogni $D_n \setminus D_{n+1}, n \geq 0$ non sta in $\mathcal{U}$ per gli assiomi di ultrafiltro, esiste X t.c. ogni $D_n \setminus D_{n+1}$ contiene esattamente un elemento di X. Si può quindi individuare una successione x_i definita come

$$x_0 = \min\{x \in X | X_x \subset D_0\}$$

$$x_i = \min\{x \in X | X_x \subset D_{x_i}\}, i \geq 1$$

dove X_x denota il segmento cofinale $\{y \in X | y > x\}$. In tal modo si ottiene una nuova partizione (stavolta di X, ma facilmente estendibile a partizione selettiva di $\mathbb{N}$ aggiungendo $X^c \notin \mathcal{U}$) data da

$$A_i = \{x \in X | x_i < x \leq x_{i+1}\}$$

e quindi una nuova successione $(z_i), z_i \in A_i\ \forall i$ (eliminando senza nulla perdere il primo termine che non appartiene ad X). Evidentemente per ogni i vale $z_{i+2} \in D_{z_n}$, dato che

$$z_{i+2} > x_{i+2} \Longrightarrow z_n \in D_{x_{n+1}}, i \geq 0$$

e poiché $x_{n+1} \geq z_n$ e quindi $D_{x_{n+1}} \subseteq X_{z_n}$, si ha appunto che $z_n \in D_{z_n}$. L'ultimo passo, infine, è considerare fra le due sottosuccessioni $a_n = z_{2n}$ e $b_n = z_{2n+1}$ quella che appartiene ad $\mathcal{U}$: essa soddisfa la tesi dato che

$$a_n = z_{2n+2} \in D_{z_{2n+2}} = D_{a_{n+1}}$$

e

$$b_n = z_{2n+3} \in D_{z_{2n+3}} = D_{b_{n+1}}.$$

(7) $\Longrightarrow$ (2) Viceversa, sia

$$\mathbb{N} = \bigsqcup A_i;$$

definiamo

$$[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup C_2$$

con

$$(n,m) \in C_1 \iff n,m \in A_i \text{ per lo stesso } A_i$$

$$(n,m) \in C_2 \quad \text{altrimenti}$$

Esiste $H \in \mathcal{U}$ t.c. $[H]^2$ è monocromatico, ovvero tutti gli elementi di H hanno lo stesso colore (quindi esiste un A_i che include un elemento dell'ultrafiltro) oppure hanno colori a due a due diversi (quindi H interseca ogni A_i in al più un punto, e come sopra può essere completato in modo da intersecarne ognuno in esattamente un punto).

□