Esercizio:
Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. I seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $\mathbb{F}$ è archimedeo

(ii) $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$

(iii) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$

(iv) Non esistono numeri infinitesimi $\epsilon \neq 0$

Dimostrazione:

$(i)\Rightarrow(iv)$ Supponiamo che esista un $\epsilon \in \mathbb{F}$ infinitesimo, ossia

$$-\frac{1}{n} < \epsilon < \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Banalmente quindi otteniamo $n\epsilon < 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$(iv)\Rightarrow(ii)$ Dimostriamo ancora la contronominale, quindi supponiamo che $\mathbb{N}$ sia limitato in $\mathbb{F}$. Ciò vuol dire che esiste $x \in \mathbb{F}$ tale che $x \geq n \;\forall n \in \mathbb{N}$ (in particolare necessariamente $x > n$). Ma allora $\frac{1}{x}$ è un infinitesimo diverso da 0.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Facciamo vedere che se $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$ allora, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$ $(x_1 < x_2)$, esiste $\alpha \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x_1 \leq \alpha \leq x_2.$$

Se $x_1 \leq 0$ e $x_2 \geq 0$, banalmente $\alpha = 0$.
Supponiamo ora che $0 \leq x_1 < x_2$ (il caso negativo è analogo) e che non esista un $m \in \mathbb{N}$ con $x_1 \leq m \leq x_2$. Definiamo

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x_1\}, \\ n_2 &= \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x_2\}, \\ \bar{n} &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{x_2 - x_1} < n\}. \end{aligned}$$

Per ipotesi $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$, dunque tali naturali esistono e vale $n_2 < x_1 < x_2 < n_1$. Allora se consideriamo $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid m > \bar{n}(n_1 - n_2)\}$ sarà possibile trovare un $k \in \mathbb{N}$ con $1 < k < (m-1)$ tale che

$$x_1 < \left(\frac{n_1 - n_2}{m}\right) k < x_2.$$

$(iii)\Rightarrow(ii)$ Sia $x \in \mathbb{F}$ e cerchiamo un $y \in \mathbb{N}$ tale che $y > x$. Sicuramente $x + 1 > x$ e quindi, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$, sappiamo che esiste un $\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, tale che

$$x < \frac{m}{n} < x + 1,$$

dunque in particolare $x < m$.

$(ii)\Rightarrow(i)$ Sia $\epsilon > 0$. Poiché $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$, esiste il naturale

$$\bar{n} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > 1/\epsilon\}.$$

Ma allora $\epsilon\bar{n} > \epsilon\frac{1}{\epsilon} = 1$.

$\square$

Esercizio:
In ${}^*\mathbb{R}$ ogni insieme numerabile ha un maggiorante.
Dimostrazione:
Se il nostro insieme è limitato superiormente in $\mathbb{R}$, abbiamo finito. Supponiamo quindi di avere un sottoinsieme X di ${}^*\mathbb{R}$ numerabile e illimitato in $\mathbb{R}$. Esiste dunque una bigezione

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X.$$

Poiché X è illimitato, è possibile trovare a partire da φ una successione crescente illimitata $\widehat{\varphi}$ in X. Ma allora $\widehat{\varphi}$ è un maggiorante per X. Preso infatti $x \in X$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(\bar{n}) = x$. Ma $\widehat{\varphi}$ è illimitata, quindi esiste un $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $\widehat{\varphi}(\bar{m}) > \varphi(\bar{n})$. Inoltre, per monotonia di $\widehat{\varphi}$, l'insieme $C = \{n \in \mathbb{N} \mid \widehat{\varphi}(n) > x\}$ contiene

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n > \bar{m}\}$$

che è cofinito e dunque è un elemento di $\mathcal{U}$.

□

Esercizio:
${}^*\mathbb{Q}$ è un campo ordinato non archimedeo.
Dimostrazione:
${}^*\mathbb{Q}$ è chiaramente un campo ordinato. Facciamo vedere che non è archimedeo. Sappiamo, per un esercizio precedente, che un campo ordinato è archimedeo se se solo se non esistono infinitesimi diversi da zero. Cerchiamo dunque in ${}^*\mathbb{Q}$ un infinitesimo $\epsilon \neq 0$. Per esempio

$$\epsilon = [\alpha] \text{ dove } \alpha = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

funziona. Infatti, per ogni $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ n \in \mathbb{N} \mid |\alpha(n)| = \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{U}$$

poiché è un insieme cofinito.

□

Definizione:
Sia X uno spazio topologico, ${}^*X$ un modello *NS* a lui associato ($X \subseteq {}^*X$) e $x \in X$. Si dice *monade di x* l'intersezione

$$\mu(x) = \bigcap_{j \in J} {}^*U_j,$$

dove $\{U_j \mid j \in J\}$ è la famiglia degli intorni di x.

Osservazione:
Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale e ${}^*X$ il relativo modello *NS*. Consideriamo $\alpha \in {}^*X$ ($X \subseteq {}^*X$) e $x \in X$. Allora

$$\alpha \in \mu(x) \Longleftrightarrow x = \mathcal{U}\text{-}\lim_n \alpha(n).$$

Dimostrazione:
Sappiamo che $\alpha \in \mu(x) \Longleftrightarrow \alpha \in {}^*U$ per ogni U intorno di $x \Longleftrightarrow$ per ogni intorno U di x

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \in U\} \in \mathcal{U},$$

ossia $\mathcal{U}\text{-}\lim_n \alpha(n) = x$.

□

Da questa osservazione discende ad esempio il seguente fatto:
Se X è un campo ordinato e $\alpha, \beta \in {}^*X$ con $\alpha \geq \beta \Longrightarrow st(\alpha) \geq st(\beta)$.

Esercizio:
Siano $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$.

$$\limsup_{n \to \infty} a_n \geq l \Longleftrightarrow \exists \xi \text{ in } {}^*\mathbb{N} \text{ infinito tale che } st(a_\xi) \geq l.$$

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Sappiamo che $\limsup_{n \to \infty} a_n \geq l \in \mathbb{R}$. Consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$, il naturale $\bar{n}$ tale che

$$a_{\bar{n}} = \sup\{a_m \mid m \geq n\}.$$

Definiamo dunque $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\xi(n) = \bar{n}$. ξ è un elemento infinito di ${}^*\mathbb{N}$ e vale

$$a_{\xi(n)} \geq l \ \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi $st(a_\xi) \geq l$.

($\Leftarrow$) Sappiamo che esiste ξ infinito in ${}^*\mathbb{N}$ tale che $st(a_\xi) \geq l$ (possiamo supporre senza perdita di generalità che ξ sia crescente). Consideriamo la successione $\left\langle a_{\bar{\xi(n)}} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle$ e chiamiamo l' il suo limite. Dunque vale

$$a_{\bar{\xi(n)}} \geq a_{\xi(n)} \ \forall n \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$\limsup_n a_n \geq \lim_n a_{\bar{\xi(n)}} = \mathcal{U}\text{-}\lim_n a_{\bar{\xi(n)}} \geq \mathcal{U}\text{-}\lim_n a_{\xi(n)} = st(a_\xi),$$

infatti l'$\mathcal{U}$-limite in questo caso coincide con il limite classico dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro non principale e quindi estende il filtro di Frechet.

$\square$