Esercizi per il corso “ultrafiltri e metodi non standard”

Marco Usula

Lezioni 11,12,18,19

Anno accademico 2014/2015

Notazioni Indicherò con ω l'insieme $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, e con $\mathbb{N}$ l'insieme $\omega \setminus \{0\}$.
I simboli $\subset$ e $\supset$ indicano inclusioni *strette* tra insiemi.

11 Esercizi 31-3-2015

Per alcuni esercizi di questa sezione mi servirà il seguente

Lemma. *Siano I, J, P, Q insiemi non vuoti, e siano $f : I \to P, g : J \to Q$. Sia $(f, g) : I \times J \to P \times Q, (i, j) \mapsto (f(i), g(j))$. Se $\mathcal{U} \in \beta I$ e $\mathcal{V} \in \beta J$, allora*

$$(f, g)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = f_* (\mathcal{U}) \otimes g_* (\mathcal{V}).$$

Dimostrazione. Sia $A \subseteq P \times Q$. Definiamo $B = (f, g)^{-1} (A) \subseteq I \times J$, per ogni $i \in I$ definiamo $B_i = \{j \in J : (i, j) \in B\}$, e definiamo $\hat{B} = \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\}$. Allora

$$\begin{aligned} A \in (f, g)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \quad &\iff \quad B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \\ &\iff \quad \hat{B} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Per ogni $p \in P$, definiamo $A_p = \{q \in Q : (p, q) \in A\}$, e definiamo $\hat{A} = \{p \in P : A_p \in g_* (\mathcal{V})\}$. Allora

$$\begin{aligned} A \in f_* (\mathcal{U}) \otimes g_* (\mathcal{V}) \quad &\iff \quad \hat{A} \in f_* (\mathcal{U}) \\ &\iff \quad f^{-1} \left(\hat{A}\right) \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Ma vale $f^{-1}\left(\hat{A}\right) = \hat{B}$: infatti

$$\begin{aligned}
i \in f^{-1}\left(\hat{A}\right) &\iff f(i) \in \hat{A} \\
&\iff A_{f(i)} \in g_*(\mathcal{V}) \\
&\iff g^{-1}\left(A_{f(i)}\right) \in \mathcal{V} \\
&\iff \left\{j \in J : g(j) \in A_{f(i)}\right\} \in \mathcal{V} \\
&\iff \{j \in J : (f(i), g(j)) \in A\} \in \mathcal{V} \\
&\iff B_i \in \mathcal{V} \\
&\iff i \in \hat{B}
\end{aligned}$$

e questo prova che $A \in (f,g)_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \iff \hat{B} \in \mathcal{U} \iff f^{-1}\left(\hat{A}\right) \in \mathcal{U} \iff A \in f_*(\mathcal{U}) \otimes g_*(\mathcal{V})$. $\square$

Esercizio 11.1. Dimostrare che l'operazione $\oplus$ è associativa.

Dimostrazione. Sia $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione somma. Applicando il Lemma 11, abbiamo

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} &= S_*((\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}) \\
&= S_*(S_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}) \\
&= S_*(S_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathrm{id}_*(\mathcal{W})) \\
&= S_*((S, \mathrm{id})_*((\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W})) \\
&= (S \circ (S, \mathrm{id}))_*((\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) &= S_*(\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})) \\
&= S_*(\mathcal{U} \otimes S_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})) \\
&= S_*(\mathrm{id}_*(\mathcal{U}) \otimes S_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})) \\
&= S_*((\mathrm{id}, S)_*(\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}))) \\
&= (S \circ (\mathrm{id}, S))_*(\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})).
\end{aligned}$$

A questo punto ci basta osservare che $S \circ (S, \mathrm{id}) = S \circ (\mathrm{id}, S)$ e ricordare che la $\otimes$ è associativa. $\square$

Esercizio 11.2. Dimostrare che:

1. Se $\mathcal{U}$ è idempotente, allora $k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
2. Esiste $\mathcal{W}$ tale che $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \iff \forall A \in \mathcal{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathcal{U}$.
3. $\mathcal{U}$ è idempotente $\iff \forall A \in \mathcal{U}$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathcal{U}$.
4. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali, e sia $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$. Allora $\mathcal{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} : \alpha \in {}^*A\}$ è idempotente $\iff$ se $\alpha \in {}^*A$ allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.

Dimostrazione.

1. Dato che $\mathbb{N} = k\mathbb{N} \sqcup (k\mathbb{N}+1) \sqcup \cdots \sqcup (k\mathbb{N}+k-1)$, uno dei pezzi sta in $\mathcal{U}$, diciamo $k\mathbb{N}+u$. Ora, abbiamo
$$k\mathbb{N} \supseteq \sum_{i=1}^{k} (k\mathbb{N}+u) \,,$$
e l'insieme a destra sta in $\overbrace{\mathcal{U} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}}^{k \text{ volte}}$ che è uguale a $\mathcal{U}$ per idempotenza. Ne consegue che $k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

2. Sia $\tilde{A} = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\}$, e sia $\mathcal{F} = \left\{\tilde{A} : A \in \mathcal{U}\right\}$. Dimostriamo che, per ogni $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$ se e solo se $\mathcal{W}$ estende $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$, allora ogni $A \in \mathcal{U}$ è tale che $\tilde{A} \in \mathcal{W}$. Viceversa, sia $\mathcal{W}$ che estende $\mathcal{F}$: allora, se $A \in \mathcal{U}$, abbiamo $A \in \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$ in quanto $\tilde{A} \in \mathcal{W}$: dunque $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, e dato che sono entrambi ultrafiltri si ha l'uguaglianza. Ora osserviamo che esiste $\mathcal{W}$ che estende $\mathcal{F}$ se e solo se ogni $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ è non vuoto, ossia se e solo se $(\forall A \in \mathcal{U})\,(\exists n \in \mathbb{N})\,(A - n \in \mathcal{U})$. Infatti, se $\mathcal{W}$ estende $\mathcal{F}$ ovviamente ogni elemento di $\mathcal{F}$ è non vuoto, mentre se ogni elemento di $\mathcal{F}$ è non vuoto allora $\mathcal{F}$ ha la FIP, in quanto se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{U}$ e $C = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, allora $\tilde{C} \subseteq \tilde{A}_1 \cap \cdots \cap \tilde{A}_n$, e questa intersezione è non vuota perchè lo è $\tilde{C}$.

3. Usando la terminologia precedente, abbiamo che $\mathcal{U}$ è idempotente se e solo se $\mathcal{U}$ estende $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{U}$ è idempotente, allora per ogni $A \in \mathcal{U}$ abbiamo $\tilde{A} \in \mathcal{U}$: prendiamo allora $a \in A \cap \tilde{A}$: allora $A - a \in \mathcal{U}$. Viceversa, se $\mathcal{U}$ non è idempotente, allora esiste $B \in \mathcal{U}$ tale che $\tilde{B} \notin \mathcal{U}$: allora $\tilde{B}^c \in \mathcal{U}$; prendiamo $A = B \cap \tilde{B}^c$. Allora, per ogni $a \in A$, si ha $a \in \tilde{B}^c$ e quindi $B - a \notin \mathcal{U}$, e dato che $A \subseteq B$ abbiamo anche che $A - a \notin \mathcal{U}$.

4. Per il punto precedente, $\mathcal{U}_\alpha$ è idempotente $\iff$ se $A \in \mathcal{U}_\alpha$ allora esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathcal{U}_\alpha$ $\iff$ se $\alpha \in {}^*A$ allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha \in {}^*A - a$ $\iff$ se $\alpha \in {}^*A$ allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.

$\square$

Esercizio 11.3. Dimostrare che, per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ non principale, la mappa $\psi_{\mathcal{U}} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non è continua.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e $\psi_{\mathcal{U}}$ è continua allora $\mathcal{U}$ è principale. Ci servono i seguenti fatti visti a lezione o in esercizi precedenti:

1. Il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è costituito dagli ultrafiltri principali.

2. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua tra spazi compatti e T_2, $(x_i)_{i \in I}$ è una I-successione a valori in X, e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, allora
$$f\left(\mathcal{U} - \lim_{i \in I}(x_i)\right) = \mathcal{U} - \lim_{i \in I}(f(x_i))\,.$$

3. La mappa $\varphi_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}, \varphi_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è continua.

4. Per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, abbiamo
$$\mathcal{V} = \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{U}_n)$$
dove $\mathcal{U}_n$ è l'ultrafiltro principale generato da n.

Ora, se $\psi_{\mathcal{U}}$ è continua, allora per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} &= \psi_{\mathcal{U}} (\mathcal{V}) \\
&= \psi_{\mathcal{U}} \left(\mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{U}_n) \right) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\psi_{\mathcal{U}} (\mathcal{U}_n)) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}_n) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\varphi_{\mathcal{U}} (\mathcal{U}_n)) \\
&= \varphi_{\mathcal{U}} \left(\mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{U}_n) \right) \\
&= \varphi_{\mathcal{U}} (\mathcal{V}) \\
&= \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}
\end{aligned}$$

e questo prova che $\mathcal{U}$ sta nel centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$, ossia che $\mathcal{U}$ è principale.

$\square$

Esercizio 11.4. Sia $k \in \mathbb{N}$, e siano $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Dimostrare che
$$k^{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}} = k^{\mathcal{U}} \odot k^{\mathcal{V}}.$$

Dimostrazione. Definiamo $S, P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ le funzioni somma e prodotto. Allora vale

$$\begin{aligned}
k^{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}} &= (\exp_k)_* (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \\
&= (\exp_k)_* (S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})) \\
&= (\exp_k \circ S)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})\,;
\end{aligned}$$

applicando il Lemma 11, abbiamo anche

$$\begin{aligned}
k^{\mathcal{U}} \odot k^{\mathcal{V}} &= P_* \left(k^{\mathcal{U}} \otimes k^{\mathcal{V}} \right) \\
&= P_* ((\exp_k)_* (\mathcal{U}) \otimes (\exp_k)_* (\mathcal{V})) \\
&= P_* ((\exp_k, \exp_k)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})) \\
&= (P \circ (\exp_k, \exp_k))_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})\,.
\end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che $\exp_k \circ S = P \circ (\exp_k, \exp_k)$. $\square$

12 Esercizi 13-4-2015

Per il prossimo esercizio userò la seguente

Proposizione. *Sia* $A \subseteq \mathbb{Z}$. *Allora*

$$BD(A) = \mathrm{st}\left(\max_{\substack{I=[\alpha,\beta]\subseteq {}^*\mathbb{Z} \\ {}^*|I| \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap I\right|}{{}^*\left|I\right|} \right).$$

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione:

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} \right).$$

Definiamo la successione

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}. \end{aligned}$$

Abbiamo già visto che la successione converge. Se $BD(A) = \alpha$, allora ogni sottosuccessione di $a(n)$ converge ad α, e quindi per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ si ha che ${}^*a(\nu) \sim \alpha$, ossia

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \max_{x\in {}^*\mathbb{Z}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap [x+1, x+\nu]\right|}{\nu} \\ &= \max_{\substack{I=[\alpha,\beta]\subseteq {}^*\mathbb{Z} \\ {}^*|I| = \nu}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap I\right|}{{}^*\left|I\right|}, \end{aligned}$$

da cui, per la generalità di ν, si ha che

$$\alpha \sim \max_{\substack{I=[\alpha,\beta]\subseteq {}^*\mathbb{Z} \\ {}^*|I| \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap I\right|}{{}^*\left|I\right|}.$$

Viceversa, se vale quest'ultima proprietà, allora ${}^*a(\nu) \sim \alpha$ per un certo $\nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, e quindi $a(n)$ ha una sottosuccessione convergente ad α, da cui che, essendo $a(n)$ convergente, si ha che $a(n) \to \alpha$. $\square$

Esercizio 12.1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{Z}$. Dimostrare che:

1. Se $A \leq_{fe} B$ allora $BD(A) \leq BD(B)$.
2. A è spesso $\iff$ A è massimale rispetto a $\leq_{fe}$ (ossia $(\forall B \subseteq \mathbb{Z})\,(A \leq_{fe} B \to B \leq_{fe} A)$).
3. Se A è AP-rich e $A \leq_{fe} B$, allora B è AP-rich.
4. Se A è sindetico a tratti e $A \leq_{fe} B$, allora lo è anche B.
5. B è sindetico a tratti $\iff$ esiste A sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.

6. Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Non vale in generale $A \leq_{fe} B \Rightarrow \overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$.
7. Non vale in generale A sindetico e $A \leq_{fe} B \Rightarrow B$ sindetico.

Dimostrazione. Fissiamo un modello nonstandard dei reali.

1. Se $A \leq_{fe} B$, allora nel modello standard vale
$$(\forall u, v \in \mathbb{Z})\,(u < v \to \exists x \in \mathbb{Z}\,(|A \cap [u,v]| \leq |B \cap [x+u, x+v]|)) :$$
infatti, esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $A \cap [u,v] + x \subseteq B$ e chiaramente $A \cap [u,v] + x \subseteq [x+u, x+v]$. Allora, nel modello nonstandard vale
$$(\forall u, v \in {}^*\mathbb{Z})\,(u < v \to \exists x \in {}^*\mathbb{Z}\,({}^*|{}^*A \cap [u,v]| \leq {}^*|{}^*B \cap [x+u, x+v]|)) .$$
Ne consegue che per ogni intervallo infinito I di iperinteri, esiste un intervallo J di iperinteri con la stessa ipercardinalità di I e tale che ${}^*|{}^*A \cap I| \leq {}^*|{}^*B \cap J|$. Dalla caratterizzazione nonstandard della densità di Banach si ha allora la tesi.
2. In un esercizio della lezione 9 abbiamo dimostrato che A è spesso se e solo se $\mathbb{Z} \leq_{fe} A$. Inoltre, sappiamo che $(\forall A \subseteq \mathbb{Z})\,(A \leq_{fe} \mathbb{Z})$. Dunque, se A è massimale allora $\mathbb{Z} \leq_{fe} A$ e quindi A è spesso; viceversa, se A è spesso allora $\mathbb{Z} \leq_{fe} A$ e quindi, per transitività di $\leq_{fe}$, $B \leq_{fe} A$ per ogni $B \subseteq \mathbb{Z}$, da cui che A è massimale rispetto a $\leq_{fe}$.
3. Sia $F = \{x+d, x+2d, ..., x+kd\}$ una progressione aritmetica lunga k contenuta in A. Allora esiste $y \in \mathbb{Z}$ tale che $F + z \subseteq B$, e quindi $F + z$ è una progressione aritmetica lunga k contenuta in B. Per la generalità di $k \in \mathbb{N}$ si ha la tesi.
4. Sia A sindetico a tratti. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che esistono intervalli finiti I arbitrariamente lunghi e tali che i "buchi" di $A \cap I$ siano di ampiezza $\leq k$. Dato che ogni $A \cap I$ con I intervallo finito è finito, B contiene un traslato di $A \cap I$, ossia esiste un intervallo J tale che $|J| = |I|$ e $A \cap I + x \subseteq B \cap J$ per un certo $x \in \mathbb{Z}$. Allora i buchi di $B \cap J$ hanno ampiezza $\leq k$, e quindi per la generalità di I abbiamo la tesi.
5. ($\Leftarrow$) Se esiste A k-sindetico tale che $A \leq_{fe} B$, allora B è k-sindetico a tratti. Infatti, supponiamo che A sia k-sindetico. Allora $A \cap [1,n]$ ha buchi di ampiezza $\leq k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: dato che esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $A \cap [1,n] + x \subseteq B$, abbiamo che $A \cap [1,n] + x \subseteq B \cap [x+1, x+n]$ e quindi B ha buchi di ampiezza $\leq k$ su un intervallo lungo n. Per la generalità di $n \in \mathbb{N}$, si ha che B è k-sindetico a tratti.
($\Rightarrow$) Sia B sindetico a tratti. Allora esiste un intervallo infinito $[\alpha, \beta] \subseteq {}^*\mathbb{N}$ tale che $[\alpha, \beta] \cap {}^*B$ abbia solo buchi finiti. Sia $S = \{n \in \mathbb{N} : \alpha + n \in {}^*B\}$. Allora S è chiaramente sindetico. Dato che $S + \alpha \subseteq {}^*B$, per la caratterizzazione nonstandard di $\leq_{fe}$ si ha $S \leq_{fe} B$.
6. Sia B spesso tale che $\overline{d}(B) = 0$ (la cui esistenza è garantita da un esercizio della lezione 7). Dato che B è spesso, si ha $\mathbb{N} \leq_{fe} B$. Dato che $\overline{d}(\mathbb{N}) = 1$, abbiamo la tesi.
7. Sia B sindetico a tratti e non sindetico (esiste banalmente). Allora, per il punto 5, abbiamo che esiste A sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.

$\square$

Esercizio 12.2. Sia $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Le seguenti sono equivalenti:

1. $\mathcal{U}$ è un P-point, ossia per ogni famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_X\backslash\mathbb{N} \subseteq \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n}\right)\backslash\mathbb{N}$.
2. Per ogni partizione propria $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{N}$ tale che $C_n \notin \mathcal{U}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap C_n$ sia finito per ogni $n \in \mathbb{N}$.
3. Per ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|X}$ sia costante o finite-to-one.
4. Se ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^\mathbb{N}}{\mathcal{U}}$ e $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo, allora esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ infinitesima tale che $[h] = \xi$.

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Chiamiamo $A_n = C_n^c$. Allora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$, e quindi per la 1 esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_X\backslash\mathbb{N} \subseteq \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n}\right)\backslash\mathbb{N}$. Allora $X \cap A_n^c$ è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$: infatti, se per assurdo avessimo $X \cap A_j^c$ infinito, allora la famiglia $\left\{X, A_j^c\right\}$ si potrebbe estendere ad un ultrafiltro nonprincipale $\mathcal{W}$ che contiene X ma non A_j, assurdo.
2. $(2 \Rightarrow 3)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e sia $C_n = f^{-1}(n)$. Allora $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione di $\mathbb{N}$. Se $C_n \in \mathcal{U}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora dato che $f_{|C_n}$ è costantemente uguale a n abbiamo finito. Supponiamo quindi che $C_n \notin \mathcal{U}$ per ogni n. Allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che $C_n \neq \emptyset$, e quindi per la 2 abbiamo che esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap C_n$ sia finito per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $f_{|X}$ è finite-to-one.
3. $(3 \Rightarrow 4)$ Sia $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimo, diciamo $\xi = [g]$ dove $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definiamo
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} m+1 & \frac{1}{m+1} \leq |g(n)| < \frac{1}{m} \\ 1 & g(n) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
Per la 3, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|X}$ sia costante o finite-to-one. Se $f_{|X}$ è costante, allora deve essere costante in 1, e quindi $g_{|X}$ deve essere costante in 0 (e quindi la tesi è ovvia): infatti, se per assurdo avessimo $f_{|X}$ costante in un certo $m+1$ con $m \in \mathbb{N}$, allora per ogni $x \in X$ si avrebbe $\frac{1}{m+1} \leq |g(x)| < \frac{1}{m}$ e quindi avremmo $\frac{1}{m+1} \leq \xi < \frac{1}{m}$, assurdo in quanto ξ è infinitesimo. Supponiamo quindi che $f_{|X}$ sia finite-to-one, e poniamo $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\}$. Allora la sottosuccessione $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima: infatti, per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'insieme degli indici $x \in X$ per i quali $|g(x)| \geq \frac{1}{m+1}$ è finito, e quindi $|g(x)|$ è definitivamente $< \frac{1}{m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Definiamo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ponendo $h(x_n) = g(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $h(y) = 0$ per ogni $y \notin X$: allora h è ovviamente infinitesima, e inoltre $h \equiv_{\mathcal{U}} g$ da cui $[h] = \xi$.
4. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$. Definiamo $C_1 = A_1^c$ e $C_{n+1} = A_{n+1}^c \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n$. I C_n sono ovviamente a due a due disgiunti, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $C_n \notin \mathcal{U}$ in quanto $C_n \subseteq A_n^c \notin \mathcal{U}$. Definiamo ora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che manda ogni elemento di C_n in $\frac{1}{n}$, e ogni elemento di $\left(\bigcup_n C_n\right)^c$ in 0. Allora $\xi = [f]$ è infinitesimo: infatti, $\left\{x \in \mathbb{N} : f(x) < \frac{1}{n}\right\} \supseteq (C_1 \cup \cdots \cup C_n)^c \in \mathcal{U}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la 4, esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{U}$ tale che $h_{|X} = f_{|X}$ e la h sia infinitesima. Allora $X \cap C_n$ è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$: infatti, dato che h è infinitesima, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x > N$ si ha $h(x) < \frac{1}{n}$ e quindi $x \notin C_n$: ne consegue che $X \cap C_n \subseteq [1, N]$ e quindi è finito. Ora, sia $\mathcal{V}$ un ultrafiltro nonprincipale contenente X. Dimostriamo per induzione su n che $A_n \in \mathcal{V}$.

(a) ($n=1$) Se per assurdo $A_1 \notin \mathcal{V}$, allora $C_1 \in \mathcal{V}$ e quindi $X \cap C_1 \in \mathcal{V}$, assurdo in quanto $\mathcal{V}$ è nonprincipale e $X \cap C_1$ è finito.

(b) (Vero fino a n, mostro per $n+1$) Se per assurdo $A_{n+1} \notin \mathcal{V}$, allora $A_{n+1}^c \in \mathcal{V}$, e quindi per ipotesi induttiva $C_{n+1} = A_{n+1}^c \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{V}$, e quindi $X \cap C_{n+1} \in \mathcal{V}$, assurdo in quanto $\mathcal{V}$ è non principale e $X \cap C_{n+1}$ è finito.

□

18 Esercizi 11-5-2015

Esercizio 18.1. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ chiusa per soprainsiemi. Dimostrare che $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$ non implica in generale $\mathcal{F}$ ultrafiltro.

Dimostrazione. Prendiamo I con almeno 3 elementi a, b, c. Definiamo $\mathcal{F}$ come la famiglia dei sottoinsiemi di I che contengono almeno due elementi di $\{a, b, c\}$. $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi non è un ultrafiltro su I, in quanto ad esempio $\{a, b\}, \{a, c\} \in \mathcal{F}$ ma $\{a\} \notin \mathcal{F}$. Ora, se $X \in \mathcal{F}^*$, allora X deve intersecare $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ e quindi non può contenere meno di due elementi di $\{a, b, c\}$, dunque $X \in \mathcal{F}$. D'altra parte, sia $X \notin \mathcal{F}^*$. Allora esiste un insieme $F \in \mathcal{F}$ tale che $X \cap F = \emptyset$: dato che $F \in \mathcal{F}$, F contiene almeno due elementi di $\{a, b, c\}$, diciamo WLOG a e b: allora X non può estendere nessuno tra $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ perchè tutti intersecano $\{a, b\}$ e quindi F; ne consegue che $X \notin \mathcal{F}$. □

Esercizio 18.2. Dato $\mathcal{F}$ un filtro su $\mathbb{N}$, definiamo $C_{\mathcal{F}} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{O}_A$. Data una famiglia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ chiusa per soprainsiemi e regolare per partizioni, definiamo $C_{\mathcal{P}} = \bigcap_{A \in \mathcal{P}^*} \mathcal{O}_A$. Dato un chiuso C di $\beta\mathbb{N}$, definiamo $\mathcal{F}_C = \bigcap_{\mathcal{U} \in C} \mathcal{U}$ e $\mathcal{P}_C = \bigcup_{\mathcal{U} \in C} \mathcal{U}$. Dimostrare che:

1. $\mathcal{F}_{C_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$;
2. $C_{\mathcal{F}_C} = C$;
3. $\mathcal{P}_{C_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$;
4. $C_{\mathcal{P}_C} = C$.

Dimostrazione. Innanzitutto, perchè tutto abbia senso, osserviamo che: $C_{\mathcal{F}}$ e $C_{\mathcal{P}}$ sono intersezioni di $\mathcal{O}_A$ che sono chiusi, e quindi sono chiusi; dato che l'intersezione di filtri su $\mathbb{N}$ è un filtro su $\mathbb{N}$, anche $\mathcal{F}_C$ è un filtro su $\mathbb{N}$; infine, dato che un'unione di ultrafiltri su $\mathbb{N}$ è banalmente regolare per partizioni e chiusa per soprainsieme su $\mathbb{N}$, allora $\mathcal{P}_C$ è regolare per partizioni e chiusa per soprainsieme su $\mathbb{N}$.

1. Se $X \in \mathcal{F}$, allora sia $\mathcal{U} \in C_{\mathcal{F}}$: allora $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, e quindi in particolare $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$, da cui che $X \in \mathcal{U}$; per la generalità di $\mathcal{U}$, abbiamo $X \in \mathcal{F}_{C_{\mathcal{F}}}$. Se $X \in \mathcal{F}_{C_{\mathcal{F}}}$, allora $X \in \mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U} \in C_{\mathcal{F}}$, ossia $X \in \mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ ultrafiltro, ossia $X \in \mathcal{F}$.

2. Se C è un chiuso di $\beta\mathbb{N}$, allora un $\mathcal{U} \in C$ contiene tutti gli elementi di $\mathcal{F}_C$: infatti, $A \in \mathcal{F}_C$ implica che A sta in tutti gli ultrafiltri contenuti in C, e quindi $A \in \mathcal{U}$. Ne consegue che $\mathcal{U} \in C_{\mathcal{F}_C}$. Viceversa, se $\mathcal{U} \notin C$, allora essendo C chiuso esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_A \cap C = \emptyset$: allora $A^c \in \mathcal{F}_C$, in quanto per ogni $\mathcal{V} \in C$ si ha $\mathcal{V} \notin \mathcal{O}_A$; ne consegue che $\mathcal{U} \not\supseteq \mathcal{F}_C$ e quindi $\mathcal{U} \notin C_{\mathcal{F}_C}$.

3. Sia $\mathcal{F}=\mathcal{P}^*$. Allora $\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}}=\mathcal{F}$. Inoltre $\mathcal{F}^*=\mathcal{P}^{**}=\mathcal{P}$. Dimostriamo che $(\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}})^*=\mathcal{P}_{C_\mathcal{P}}$. Si ha

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}})^* &= \left(\bigcap_{\mathcal{U}\in C_\mathcal{F}}\mathcal{U}\right)^* \\
&= \bigcup_{\mathcal{U}\in C_\mathcal{F}}\mathcal{U} \\
&= \bigcup_{\mathcal{U}\supseteq\mathcal{F}}\mathcal{U} \\
&= \bigcup_{\mathcal{U}\subseteq\mathcal{P}}\mathcal{U} \\
&= \mathcal{P}_{C_\mathcal{P}}.
\end{aligned}$$

4. Sia $\mathcal{F}=\mathcal{P}^*$. Allora $C_\mathcal{F}=\bigcap_{A\in\mathcal{F}}\mathcal{O}_A=\bigcap_{A\in\mathcal{P}^*}\mathcal{O}_A=C_\mathcal{P}$, e quindi dato che $\mathcal{P}_C^*=\mathcal{F}_C$, abbiamo che $C_{\mathcal{P}_C}=C_{\mathcal{F}_C}=C$.

□

Esercizio 18.3.

1. La famiglia $\Delta=\{\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}:(\forall A\in\mathcal{U})\,(BD\,(A)>0)\}$ è un ideale bilatero in $(\beta\mathbb{N},\oplus)$.
2. La famiglia vdW $=\{\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}:(\forall A\in\mathcal{U})\,(A \text{ è AP-rich})\}$ è un ideale bilatero in $(\beta\mathbb{N},\oplus)$.
3. La famiglia Δ è un ideale sinistro in $(\beta\mathbb{N},\odot)$.
4. La famiglia $\overline{d}=\left\{\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N}:(\forall A\in\mathcal{U})\left(\overline{d}\,(A)>0\right)\right\}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N},\oplus)$.

Dimostrazione. Prima dimostriamo un lemma.

Lemma. *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ tali che se $A\leq_{fe}B$ e $A\in\mathcal{F}$ allora $B\in\mathcal{F}$, allora la famiglia F degli ultrafiltri che sono sottoinsiemi di $\mathcal{F}$ è un ideale bilatero di $(\beta\mathbb{N},\oplus)$.*

Dimostrazione. Fissiamo un modello nonstandard ${}^*\mathbb{R}$ in cui ogni ultrafiltro su $\mathbb{N}$ si esprime nella forma $\mathcal{U}_\alpha=\{A\subseteq\mathbb{N}:\alpha\in{}^*A\}$ per un certo $\alpha\in^*\mathbb{N}$. Siano $\mathcal{U}\in F$ e $\mathcal{V}\in\beta\mathbb{N}$. Se $A\in\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$, allora $\{n\in\mathbb{N}:A-n\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{V}$ e quindi in particolare esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $A-n\in\mathcal{U}$. Dato che $A-n\leq_{fe}A$ e $A-n\in\mathcal{F}$, allora anche $A\in\mathcal{F}$: per la generalità di A, si ha che $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\subseteq\mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\in F$. Per la generalità di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, abbiamo che F è un ideale sinistro. Ora, sia $\alpha\in{}^*\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V}=\mathcal{U}_\alpha$. Allora, se $A\in\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}_\alpha$, allora l'insieme $A_\alpha=\{n\in\mathbb{N}:A-n\in\mathcal{U}_\alpha\}=\{n\in\mathbb{N}:\alpha+n\in{}^*A\}$ sta in $\mathcal{U}$. Ora, $A_\alpha+\alpha\subseteq{}^*A$, e quindi $A_\alpha\leq_{fe}A$: allora, dato che $A_\alpha\in\mathcal{F}$, anche $A\in\mathcal{F}$, e quindi per la generalità di A abbiamo $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\subseteq\mathcal{F}$ da cui $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\in F$, e quindi F è un ideale destro. □

1. Deriva dal lemma ricordando che la proprietà "avere densità di Banach positiva" è stabile rispetto a $\leq_{fe}$.
2. Deriva dal lemma ricordando che la proprietà "essere AP-rich" è stabile rispetto a $\leq_{fe}$.

3. Sia $\mathcal{U} \in \Delta$ e sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{V} \odot \mathcal{U}$, allora $\{n \in \mathbb{N} : A/n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, e quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A/n \in \mathcal{U}$. Allora $BD(A/n) > 0$, e quindi anche $BD(n \cdot (A/n)) > 0$. Ma $n \cdot (A/n) \subseteq A$, e quindi anche $BD(A) > 0$. Per la generalità di A abbiamo $\mathcal{V} \odot \mathcal{U} \in \Delta$ e quindi Δ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.

4. Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Osserviamo allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|(A-k) \cap [1,n]| = |A \cap [k+1, k+n]| \leq |A \cap [1, k+n]|$, e quindi anche nel modello nonstandard vale che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ si ha ${}^*|{}^*(A-k) \cap [1,\nu]| \leq {}^*|{}^*A \cap [1, k+\nu]|$. Ora, ricordando la caratterizzazione non standard della densità asintotica superiore, abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{d}(A-k) &= \max\left\{\mathrm{st}\left(\frac{{}^*|{}^*(A-k)\cap[1,\nu]|}{\nu}\right) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\right\} \\ &= \mathrm{st}\left(\frac{{}^*(A-k)\cap[1,\mu]}{\mu}\right) \end{aligned}$$

per un certo $\mu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Allora osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{{}^*|{}^*(A-k)\cap[1,\mu]|}{\mu} &\leq \frac{{}^*|{}^*A\cap[1,k+\mu]|}{\mu} \\ &= \frac{{}^*|{}^*A\cap[1,k+\mu]|}{k+\mu}\frac{k+\mu}{\mu} \\ &\sim \frac{{}^*|{}^*A\cap[1,k+\nu]|}{k+\nu} \end{aligned}$$

in quanto $\frac{k+\mu}{\mu} = 1 + \frac{k}{\mu} \sim 1$ essendo k finito e μ infinito. Allora, passando alle parti standard, abbiamo che $\overline{d}(A-k) \leq \overline{d}(A)$.
Ora, sia $\mathcal{U} \in \overline{d}$ e sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Sia $A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Allora $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, e quindi esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A - k \in \mathcal{U}$, da cui che $\overline{d}(A-k) > 0$. Ma allora $0 < \overline{d}(A-k) \leq \overline{d}(A)$, e quindi $\overline{d}(A) > 0$: per la generalità di A si ha che $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \overline{d}$, e quindi $\overline{d}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.

□

19 Esercizi 12-5-2015

Esercizio 19.1. Siano X, Y spazi topologici. Fissiamo un universo nonstandard $\langle V_\omega(Z), V_\omega({}^*Z), {}^*\rangle$ tale che $X, Y \in V_\omega(Z)\backslash Z$. Sia $x \in X$. La *monade* di x è l'insieme

$$\mu(x) = \bigcap_{U \text{ intorno di } x} {}^*U.$$

Dato $\xi \in {}^*X$, diremo che $\xi \approx x$ se e solo se $\xi \in \mu(x)$. Dimostrare che:

1. $A \subseteq X$ è aperto $\iff$ per ogni $x \in A$ si ha $\mu(x) \subseteq {}^*A$.

2. $A \subseteq X$ è chiuso $\iff$ per ogni $x \in X$ si ha che se $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ allora $x \in A$.

3. Una mappa $f : X \to Y$ è continua in $x \in X$ $\iff$ per ogni $\xi \in \mu(x)$ si ha ${}^*f(\xi) \approx f(x)$.

4. Supponiamo che il modello nonstandard scelto abbia il κ-enlargement per κ cardinale sufficientemente grande. Allora X è compatto se e solo se per ogni $\xi \in {}^*X$ esiste $x \in X$ tale che $\xi \approx x$.

Dimostrazione.

1.

2. Dimostro i primi due punti insieme. Sia $A \subseteq X$, e sia x un punto interno ad A: allora A è un intorno di x, e quindi $\mu(x) \subseteq {}^*A$ per ogni $x \in X$. Sia x di frontiera per A: allora $x \notin \operatorname{int}(A)$ e $x \notin \operatorname{est}(A) = \operatorname{int}(X \backslash A)$, e quindi per quanto appena dimostrato abbiamo $\mu(x) \nsubseteq {}^*A$ e $\mu(x) \nsubseteq {}^*(X \backslash A)$, da cui che, essendo ${}^*(X \backslash A) = {}^*X \backslash {}^*A$, abbiamo $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ e $\mu(x) \cap {}^*(X \backslash A) \neq \emptyset$. Analogamente, se $\mu(x)$ interseca sia ${}^*A$ sia ${}^*(X \backslash A)$, allora x non può essere interno ad A nè a $X \backslash A$, e quindi x è di frontiera per A. Ne consegue che se $\mu(x) \subseteq {}^*A$ per un certo $x \in X$, allora x è un punto interno di A. Da queste caratterizzazioni segue immediatamente che A è aperto $\iff$ ogni punto di A è interno ad A $\iff$ $(\forall x \in A)(\mu(x) \subseteq {}^*A)$, e che A è chiuso $\iff$ A contiene la sua frontiera $\iff$ $(\forall x \in X)(\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A)$.

3. Sia $f : X \to Y$ continua in $x \in X$. Sia V intorno aperto di $f(x)$: allora esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Ora, se $\xi \in \mu(x)$, allora per quanto visto prima abbiamo $\xi \in {}^*U$, e quindi dato che ${}^*f({}^*U) \subseteq {}^*V$ per transfer, abbiamo che ${}^*f(\xi) \in {}^*V$. Per la generalità di V, abbiamo che ${}^*f(\xi) \in \mu(f(x))$. Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \in \mu(x)$ si abbia ${}^*f(\xi) \in \mu(f(x))$. Sia V un intorno aperto di $f(x)$. Dimostriamo che $x \in \operatorname{int}\left(f^{-1}(V)\right)$. Dato che ${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)) \subseteq {}^*V$, abbiamo che $\mu(x) \subseteq ({}^*f)^{-1}({}^*V) = {}^*\left(f^{-1}(V)\right)$, e quindi $x \in \operatorname{int}\left(f^{-1}(V)\right)$.

4. $(\Leftarrow)$ Sia X non compatto. Allora esiste un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ che non ha sottoricoprimenti finiti. Allora $\{X \backslash U_i : i \in I\}$ ha la FIP, e quindi per enlargement esiste $\xi \in \bigcap_{i \in I}({}^*X \backslash {}^*U_i)$. Allora, per ogni $x \in X$, $\xi \notin \mu(x)$: infatti, se così fosse, allora preso U_i tale che $x \in U_i$, avremmo $\xi \in {}^*U_i$, assurdo.
$(\Rightarrow)$ Per assurdo sia $\xi \in {}^*X$ tale che $\xi \notin \mu(x)$ per ogni $x \in X$. Allora per ogni $x \in X$ esiste U_x intorno aperto di x tale che $\xi \notin {}^*U_x$. Ora, chiaramente la famiglia $\{U_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X, e quindi essendo X compatto esiste un sottoricoprimento finito $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Allora $\xi \in {}^*U_{x_1} \cup \cdots \cup {}^*U_{x_n}$, assurdo.

□

Esercizio 19.2. Sia (X, T) un sistema dinamico topologico. Dimostrare che $x \in X$ è *ricorrente non periodico* (ossia $x \in \overline{\operatorname{orb}(x)}$ e $\operatorname{orb}(x)$ è infinita) se e solo se per ogni intorno U di x l'insieme $\operatorname{orb}(x) \cap U$ è infinito.

Dimostrazione. La direzione $\Leftarrow$ è ovvia. Per dimostrare $\Rightarrow$ mi basta dimostrare che se $x \in X$ è ricorrente non periodico, allora anche Tx lo è. Infatti, in questo modo si verifica induttivamente che $T^n x$ è ricorrente non periodico per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi preso U intorno di x si ha che esiste n tale che $T^n x \in U$, e quindi U è intorno di $T^n x$, da cui che esiste m tale che $T^{m+n} x \in U$ eccetera. Dimostriamo che se x è ricorrente non periodico allora anche Tx lo è. Chiaramente anche l'orbita di Tx è infinita. Ora, si ha $\operatorname{orb}(Tx) = \operatorname{orb}(x) \cap \{Tx\}^c$, e quindi $\overline{\operatorname{orb}(Tx)} = \overline{\operatorname{orb}(x)} \cap \overline{\{Tx\}^c}$. Ovviamente $Tx \in \overline{\operatorname{orb}(x)}$, dunque $Tx \in \overline{\operatorname{orb}(Tx)}$ se e solo se $Tx \in \overline{\{Tx\}^c}$, ossia se e solo se

$\{Tx\}$ non è aperto. Se per assurdo $\{Tx\}$ fosse aperto, allora $T^{-1}(\{Tx\}) = U$ sarebbe aperto per continuità di T. Ma allora U è un intorno aperto di x, e quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $T^n x \in U$. Questo vuol dire che $T^{n+1}x = Tx$, assurdo in quanto $\operatorname{orb}(x)$ è infinita. $\square$

Esercizio 19.3. Sia (X,T) un sistema dinamico topologico. Fissiamo un universo nonstandard $\langle V_\omega(Y), V_\omega({}^*Y), {}^*\rangle$ con il κ-enlargement per κ cardinale sufficientemente grande, e tale che $\mathbb{N}, X \subseteq Y$. Dimostrare che $x \in X$ è ricorrente $\iff$ esiste $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $T^\nu x \approx x$.

Dimostrazione. Dato U intorno di x, definiamo $A_U = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$. Ora, x è ricorrente se e solo se per ogni U intorno di x esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \in A_U$, e questo è vero se e solo se la famiglia $\mathcal{F} = \{A_U : U \,\text{intorno di}\, x\}$ ha la FIP: infatti, $A_{U_1} \cap \cdots \cap A_{U_k} = A_{U_1 \cap \cdots \cap U_k}$. Ma $\mathcal{F}$ ha la FIP se e solo se esiste $\nu \in \bigcap_{U\,\text{intorno di}\,x} {}^*A_U$: infatti, se $\mathcal{F}$ ha la FIP, allora per enlargement la precedente intersezione è non vuota; viceversa, se la precedente intersezione è non vuota allora in particolare ${}^*A_{U_1} \cap \cdots \cap {}^*A_{U_k} \neq \emptyset$, e quindi $A_{U_1} \cap \cdots \cap A_{U_k} \neq \emptyset$ da cui che $\mathcal{F}$ ha la FIP. Per concludere, se $\nu \in \bigcap_{U\,\text{intorno di}\,x} {}^*A_U$ allora $T^\nu x \in \mu(x)$: infatti nel modello standard vale $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A_U \leftrightarrow T^n x \in U)$, e quindi nel modello nonstandard vale $(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})(\nu \in {}^*A_U \leftrightarrow T^\nu x \in {}^*U)$. $\square$

Esercizio 19.4. Dimostrare il teorema di Tychonoff.

Dimostrazione. Sia I un insieme infinito, e siano $\{X_i\}_{i\in I}$ spazi topologici compatti. Dobbiamo dimostrare che $X = \prod_{i\in I} X_i$ con la topologia prodotto è compatto. WLOG supponiamo che I e gli X_i siano a due a due disgiunti, definiamo

$$Y = I \sqcup \left(\bigsqcup_{i\in I} X_i\right)$$

e fissiamo un universo nonstandard $\langle V_\omega(Y), V_\omega({}^*Y), {}^*\rangle$ con la proprietà del κ-enlargement per κ cardinale sufficientemente grande. Chiaramente sia X che gli X_i sono elementi di $V_\omega(Y)\setminus Y$, quindi vale la caratterizzazione precedente di compattezza. Dato che I contiene solo atomi, possiamo pensare I dentro ${}^*I$. Fissiamo la funzione $\sigma : I \to \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ tale che $\sigma(i) = X_i$. Allora X è l'insieme delle funzioni $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ tali che per ogni $i \in I$ si abbia $f(i) \in \sigma(i)$, dunque ${}^*X$ è l'insieme delle funzioni *interne* $\psi : {}^*I \to {}^*\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ tali che, per ogni $\nu \in {}^*I$, si abbia $\psi(\nu) \in {}^*\sigma(\nu)$.
Sia ora $\varphi \in X$. Allora, dato $i \in I$, *non* è detto che $\varphi(i) \in X_i$, ma sicuramente $\varphi(i) \in {}^*X_i$ in quanto $({}^*\sigma)(i) = {}^*(\sigma(i))$ per ogni $i \in I$; tuttavia, dato che ogni X_i è compatto, esiste un $f_i \in X_i$ "vicino" a $\varphi(i)$, ossia tale che $\varphi(i) \in \mu(f_i)$. Definiamo quindi $f \in X$ tale che $f(i) = f_i$, e dimostriamo che $\varphi \in \mu(f)$. Sia $U = \prod_{i\in I} U_i$ un intorno di base di f, ossia per ogni $i \in I$ U_i è un intorno aperto di f_i e $U_i = X_i$ per tutti gli $i \in I\setminus F$, dove F è un sottoinsieme finito di I: verifichiamo che $\varphi \in {}^*U$. Sia $\tau : I \to \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$ tale che $\tau(i) = U_i$ per ogni $i \in I$: dato che U è l'insieme delle $g \in X$ tali che $g(i) \in \tau(i)$ per ogni $i \in F$, allora ${}^*U$ è l'insieme delle $\psi \in {}^*X$ tali che $\psi(i) \in {}^*\tau(i)$ per ogni $i \in {}^*F$; ma ${}^*F = F$ in quanto F è finito: ne consegue che $\psi(i) \in {}^*\tau(i) = {}^*U_i$ per ogni $i \in F$. Ma allora $\varphi \in {}^*U$: infatti, per ogni $i \in I$ abbiamo che $\varphi(i) \in {}^*U_i$ in quanto U_i è un intorno aperto di f_i e $\varphi(i) \in \mu(f_i)$. Ne consegue la tesi. $\square$