Ultrafiltri e metodi non standard, esercizi lezione 6

Luigi Marangio

L'ultrafiltro con cui montiamo tutto lo chiamiamo $\mathcal{U}$.

1 Esercizio 1

Dimostrare che la coinizialità di $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ è non numerabile.

1.1 Soluzione

Sia (μ_i) una successione di ipernaturali infiniti, costruiamo un ipernaturale infinito τ, tale che $\forall i \ \tau < \mu_i$.

A tal fine consideriamo gli insiemi $X_{ij} = \{n : \mu_i(n) \geq j\}$ che sta in $\mathcal{U}$, poichè i μ_i sono infiniti; allora anche intersezioni finite di questi insiemi appartengono all'ultrafiltro, definiamo:

$$A_1 = \{n : \mu_1(n) \geq 1\}, \cdots, A_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_{in}.$$

Sia $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che $\tau(i) = max\{n \in \mathbb{N} : \ i \in A_n\}$; tale massimo esiste perchè se per assurdo $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $k \in \cap_I A_i$, con I insieme di indici infinito, allora $\mu_1(k) \geq j$, $\forall j \in I$, e quindi $\forall j \in \mathbb{N}$, e dunque $\mu_1(k)$ è un infinito, ma ciò è assurdo.

τ così definito risulta essere un infinito, infatti $\{n : \tau(n) \geq j\} = A_j \in \mathcal{U}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Fissiamo adesso $k \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che $\tau < \mu_k$, dalla generalità di k si avrà la tesi:

$$\tau \leq \mu_k \Leftrightarrow \{n : \ \tau(n) \leq \mu_k(n)\} \in \mathcal{U};$$

ma $A_k \subset \{n : \ \tau(n) \leq \mu_k(n)\}$, infatti $A_k = \cup_{i=k}^{\infty} A_i \setminus A_{i-1}$, e se $n \in A_t \setminus A_{t-1}$, con $t \geq k$, allora $\mu_k(n) \geq t = \tau(n)$. Dunque per sovrainsieme abbiamo la tesi con una disuguaglianza debole, per quella forte basta prendere $\tau - 1$.

2 Esercizio 2

Gli insiemi interni sono chiusi per complemento, unione, intersezione, e differenza insiemistica.

2.1 Soluzione

Sia $A \subset^* \mathbb{R}$ un insieme interno e (A_n) la successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ a lui associata; dimostriamo che (A_n^c) dimostra l'internità di A^c:

$$\tau \in A^c \Leftrightarrow \tau \notin A \Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \in A_n\} \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \in A_n\}^c \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \notin A_n\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \in A_n^c\} \in \mathcal{U}.$$

Per quanto riguarda l'unione:

$$\tau \in A \cup B \Leftrightarrow \tau \in A \vee \tau \in B \Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \in A_n\} \in \mathcal{U} \vee \{n: \ \tau(n) \in B_n\} \in \mathcal{U},$$

sfruttando la proprietà di sovrainsieme e la regolarità per partizioni di $\mathcal{U}$,

$$\Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \in A_n\} \cup \{n: \ \tau(n) \in B_n\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n: \ \tau(n) \in A_n \cup B_n\} \in \mathcal{U}.$$

Per intersezione e differenza insiemistica osserviamo che:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \wedge A \setminus B = A \cap B^c.$$

3 Esercizio 3

1. $\limsup(a_n) \geq l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \nu$ infinito tale che $|st(a_\nu)| \geq l$;
2. $\limsup(a_n) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow l = max\{|st(a_\nu)| : \nu \in^* \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$.

3.1 Soluzione

1. Sia $A = \{a_n; \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Suppongo senza perdere di generalità (a_n) non decrescente.

   $$\limsup a_n \geq l \Leftrightarrow \inf_n (\sup_{k \geq n} a_k) \geq l \Leftrightarrow \forall n, \sup_{k \geq n} a_k \geq l \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \forall n \exists k \geq n: \ a_k \geq l \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in A: \ b > a \wedge b \geq l.$$

   Questa è una formula del primo ordine alla quale possiamo applicare il principio di trasfer:

   $$\Leftrightarrow \forall a \in^* A \exists b \in^* A: \ b > a \wedge b \geq l \Leftrightarrow \forall \tau \in^* \mathbb{N} \exists \nu > \tau: \ a_\nu \geq l \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \exists \nu \text{ infinito } : \ a_\nu \geq l \Leftrightarrow \exists \nu: \ st(a_\nu) \geq l;$$

   giustifico l'ultima implicazione: per ipotesi sappiamo che $\{n: \ a_\nu(n) \geq l\} \in \mathcal{U} \wedge \{n: \ a_\nu(n) = st(a_\nu)\} \in \mathcal{U}$; dunque l'intersezione è in $\mathcal{U}$, cioè $\{n: \ st(a_\nu) \geq l\} \in \mathcal{U}$.

   Per il viceversa usiamo comunque il principio di Transfer:

   supponiamo per assurdo che $\limsup a_n < l$, allora $\forall a \in A, a < l \Leftrightarrow \forall a \in^* A, a < l$, e questo è assurdo perche $a_\nu \in^* A$, $st(a_\nu) \geq l$, e dunque per quanto osservato prima $a_\nu \geq l$.

2. $\limsup a_n = l \Leftrightarrow \limsup a_n \geq l \wedge \limsup a_n \leq l$, dunque se e solo se esiste un ν infinito tale che $st(a_\nu) \geq l$ e $\forall \tau \in^* \mathbb{N}\ st(a_\tau) \leq l$, cioè l deve essere il massimo delle parti standard degli a_τ al variare di τ.

4 Esercizio 4

Da ora in poi interpretiamo il simboli di relazione d'ordine come l'ordinamento RK ($<=<_{RK}$). Dimostrare che:

1. $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \leq \mathcal{W}$;

2. $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.

4.1 Soluzione

1. Per ipotesi $\exists f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che, $f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \wedge g_*(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$, dunque $\mathcal{U} = f_*(g_*(\mathcal{W}))$. Per concludere dimostriamo che $f_*(g_*(\mathcal{W})) = (f \circ g)_*(\mathcal{W})$:

$$A \in f_*(g_*(\mathcal{W})) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in g_*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow g^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{W} \Leftrightarrow$$

$$(f \circ g)^{-1}(A) \in \mathcal{W} \Leftrightarrow A \in (f \circ g)_*(\mathcal{W}).$$

2. Il secondo punto è (molto) più delicato e prevede qualche preparativo, cioè l'esercizio 5 e i seguenti due lemmi:

   Lemma 4.1. $\{n :\ f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U} \Rightarrow f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$.

   Lemma 4.2. $f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f|A$ è iniettiva.

   Vediamo come si raggiunge la tesi: per ipotesi $\exists f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che $f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \wedge g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, e dunque per quanto osservato nella prima parte dell'esercizio $(g \circ f)_*(\mathcal{V}) = g_*(f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$; ma allora per il lemma 4.2. $\exists A \subset \mathbb{N}$ tale che $g \circ f|A$ è iniettiva; ma allora $f|A$ è iniettiva e quindi applicando di nuovo il lemma 4.2. $\mathcal{V} \cong f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

   lemma 4.1. Per ipotesi $\{n :\ f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$, dunque per le proprietà di ultrafiltro, anche $B = A \cap \{n :\ f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$; per costruzione $g|B = f|B$, e $f(B) \subset A$, cioè $g(B) \subset A$. Quindi $B \subset g^{-1}(A)$, e dunque per sovrainsieme $g^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in g_*(\mathcal{U})$.

   Questo dimostra che $f_*(\mathcal{U}) \subset g_*(\mathcal{U})$, l'altro contenimento si mostra in maniera analoga.

   □

lemma 4.2. Se per ipotesi $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\sigma_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, allora per l'esercizio 5, $\{n : \sigma(f(n)) = n\} \in \mathcal{U}$, e su quest'ultimo insieme f è iniettiva.

Viceversa sia $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|A$ è iniettiva. A è infinito, in quanto $\mathcal{U}$ è non principale, dunque lo posso spezzare in due pezzi infiniti $A = A_1 \cup A_2$; $\mathcal{U}$ ultrafiltro, quindi posso assumere $A_1 \in \mathcal{U}$.

Estendiamo $f|A_1$ ad una mappa bigettiva $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così fatta: sia $\sigma : \mathbb{N} \setminus A_1 \to \mathbb{N} \setminus f(A_1)$ e pongo $\tau|A_1 = f|A_1 \wedge \tau|A_1^c = \sigma|A_1^c$. Osserviamo che per fare questa costruzione abbiamo sfruttato il fatto che $|A_1| = |A| = |\mathbb{N}|$, oltre al fatto che per iniettività $|A_1| = |f(A_1)|$.

Abbiamo quasi vinto: $\{n : \tau(n) = f(n)\} \supset A_1$, quindi per sovrainsieme $\{n : \tau(n) = f(n)\} \in \mathcal{U}$; allora per il lemma 4.1. $f_*(\mathcal{U}) = \tau_*(\mathcal{U})$, e dunque τ^{-1} testimonia il fatto che $f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$. □

5 Esercizio 5

Se $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Rightarrow \{n : f(n) = n\} \in \mathcal{U}$.

5.1 Soluzione

Se per assurdo $\{n : f(n) = n\} \notin \mathcal{U}$, allora $\{n : f(n) \neq n\} \in \mathcal{U}$. Ma allora a meno di insiemi trascurabili secondo $\mathcal{U}$, posso considerare g tale che $g(n) \neq n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora per il teorema dei 3 colori $\exists \mathbb{N} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ tale che $g(C_i) \cap C_i = \emptyset$.

Poichè $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, possiamo assumere che $C_1 \in \mathcal{U}$; allora $g(C_1) \notin \mathcal{U}$, altrimenti $\emptyset \in \mathcal{U}$, tuttavia $g(C_1) \in f_*(\mathcal{U})$, perchè $C_1 \in \mathcal{U}$, da cui deduciamo

$$\mathcal{U} \neq g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U}),$$

assurdo.