Ultrafiltri e metodi non standard, esercizi lezione 5

Luigi Marangio

1 Esercizio 1

Verificare (nei casi in cui ha senso) che:

1. $st(\xi + \mu) = st(\xi) + st(\mu)$;
2. $st(\xi \cdot \mu) = st(\xi) \cdot st(\mu)$;
3. $st(\frac{\xi}{\mu}) = \frac{st(\xi)}{st(\mu)}$.

1.1 Soluzione

Distinguiamo 4 casi (per semplicità):

$st(\xi) = st(\mu) = \infty$

1. $\xi + \mu$ è positivo poichè somma di positivi; inoltre $\forall n \in \mathbb{N} \xi > n \wedge \mu > n \Rightarrow \xi + \mu \geq 2n \geq n \forall n$, cioè $st(\xi) + st(\mu) = \infty + \infty = \infty = st(\xi + \mu)$;
2. $\xi \cdot \mu$ è positivo poichè prodotto di elementi di segno concorde, ed è infinito perchè $\xi \cdot \mu \geq n^2 \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
3. non ha senso in questo caso.

$st(\xi) = \infty, st(\mu) = -\infty$

1. Non ha senso in questo caso.
2. Sappiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \ \xi \geq n \wedge \mu \leq -n$, quindi $\xi \cdot \mu \leq \xi \cdot (-n) = (-\xi)n \leq -n^2 \leq -n$; quindi $st(\xi) \cdot st(\mu) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty = st(\xi \cdot \mu)$;
3. non ha senso.

$st(\xi) = \infty, \ st(\mu) = r$

1. $\xi \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dunque $\xi + \mu \geq n + \mu \geq n$, cioè $\xi + \mu$ è infinito;
2. Assumiamo $r \neq 0$, altrimenti non ha senso. Per la proprietà archimedea, abbiamo che $\xi \cdot \mu \geq n \cdot \mu \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
3. Assumiamo $r \neq 0$, altrimenti non ha senso. $\frac{\xi}{\mu} \geq \frac{n}{\mu} \geq \frac{n}{2r} \ \forall n$, dunque $\frac{\xi}{\mu} > n \ \forall n$.

$st(\xi) = p, st(\mu) = q$

1. Mostriamo che $\xi + \mu \sim p + q \Leftrightarrow (\xi - p) + (\mu - q) \sim 0$; ma $(\xi - p) + (\mu - q) \leq \frac{2}{n}$, e quindi ponendo $n = 2k$ si ha la tesi;

2. come prima mostriamo che $\xi\mu - pq \sim 0$; dai punti precedenti si ha che $[(\xi-p)(\mu-1)]^{-1} \sim \infty+\infty = \infty \Rightarrow (\xi-p)(\mu-q) \sim 0$. Ora osserviamo che $p\mu \sim pq$ e $\xi q \sim pq$, infatti $p\mu - pq = p(\mu - q) \sim p \cdot 0 = 0$, mentre $\xi q - pq = (\xi - p)q \sim (p - p)q = 0$; dunque $0 \sim (\xi - p)(\mu - q) = \xi\mu - p\mu - \xi q + pq \sim \xi\mu - pq$.

3. basta osservare che $\frac{p}{q} = pq^{-1}$ e applicare il punto precedente.

2 Esercizio 2

$|^*\mathbb{N}| = c$.

2.1 Soluzione

3 Esercizio 3

Dimostrare che:

1. $^*(A \cap B) =^* A \cap^* B$;

2. $^*(A \cup B) =^* A \cup^* B$;

3. $^*(A \setminus B) =^* A \setminus^* B$.

3.1 Soluzione

1. $^*(A \cap B) = \{[\sigma] : \ \sigma : \mathbb{N} \to A \cap B\} = \{[\sigma] : \ \sigma : \mathbb{N} \to B\} \cap \{[\sigma] : \ \sigma : \mathbb{N} \to B\} =^* A \cap^* B$;

2. $^*(A \cup B) = \{[\sigma] : \ \sigma : \mathbb{N} \to A \cup B\} = \{[\sigma] : \ \sigma : \mathbb{N} \to B\} \cup \{[\sigma] : \ \sigma : \mathbb{N} \to B\} =^* A \cup^* B$; qui ci vuole una precisazione: il $\supset$ è ovvio, l'altro un po di meno, dimostriamolo. Sia $[\sigma] \in^* (A \cup B)$, e considero $\mathcal{U} \ni \mathbb{N} = \{n : \sigma(n) \in A\} \cup \{n : \sigma(n) \in B\}$; allora poichè $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, almeno uno dei due pezzi ci deve stare, cioè σ è $\mathcal{U}-$equivalente ad una successione in A o in B.

3. osservo che $A \setminus B = A \cap B^c$.

4 Esercizio 4

Una funzione (reale) è continua in senso non standard se e solo se è $\varepsilon - \delta$ continua.

4.1 Soluzione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\xi \sim x_0$; allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $|\xi - x_0| < n^{-1}$. In particolare per qualunque $\delta > 0$ vale $|\xi - x_0| < \delta$, cioè $\Delta = \{i : \xi(i) - x_0 < \delta, \forall \delta\} \in \mathcal{U}$. Quindi per continuità standard, $\Sigma = \{i : |f(\xi(i)) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall \varepsilon\} \supset \Delta \in \mathcal{U}$, e quindi per sovrainsieme $\Sigma \in \mathcal{U}$, cioè ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.

Viceversa se per assurdo esistesse $\varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta \exists x : \ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$; ma se $|x - x_0| < \delta$, $\forall \delta$, allora $x \sim x_0$, e dunque per continuità non standard ${}^*f(x) = f(x) \sim f(x_0)$, cioè $|f(x) - f(x_0)| < n^{-1} \ \forall n$, assurdo.