Ultrafiltri e metodi non standard, esercizi lezione 4

Luigi Marangio

1 Esercizio 1

Teorema 1.1 (CPT combinatoria)**.** Se $\mathcal{A}$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su un insieme X, allora esiste un sottinsieme di X, sia Y, finito, tale che $\mathcal{A}$ è r-regolare su Y.

Teorema 1.2 (CPT combinatoria, versione 2)**.** Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi finiti, r-regolare su X, allora $\exists \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ finita, tale che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X.

Dimostrare che le due nozioni di compattezza combinatoria sono equivalenti.

1.1 Soluzione

- [CPT I$\Rightarrow$ CPT II];

  Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi finiti, r-regolare su X. Allora per CPT I, esiste un Y finito, tale che $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y. Per dimostrare la tesi, dimostriamo che $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \subset Y\}$ è r-regolare su X.

  Osserviamo che $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, e che $\mathcal{F}_0$ è una famiglia finita, poichè contenuta in $\mathcal{P}(Y)$, che sono finite in quanto Y è finito.

  Sia ora $X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ una colorazione; questa induce una colorazione su $Y = (C_1 \cap Y) \cdots (C_r \cap Y)$. Poichè $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y, $\exists i \wedge \exists G \in \mathcal{F}$ tali che $G \subset C_i \cap Y$. Ma allora $G \subset Y$, cioè $G \in \mathcal{F}_0$, e G è monocromatico, come volevasi dimostrare.

- [CPT II$\Rightarrow$ CPT I]; Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi finiti, r-regolare su X. Allora per CPT II, esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ r-regolare su X. Per dimostrare la tesi, dimostriamo che $\mathcal{F}$ è r-regolare su $Y = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F$.

  Osserviamo che poichè $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, allora $Y \subset X$, e che Y è finito, poichè unione finita di insiemi finiti.

  Sia ora $Y = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ una colorazione; consideriamo la colorazione indotta su $X = D_1 \cup \cdots \cup D_r \cup Y^c$; $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X, quindi $\exists i \wedge \exists T \in \mathcal{F}_0$, tali che $T \subset D_i \vee T \subset Y^c$. Ma T è un elemento di $\mathcal{F}_0$, allora per definizione $T \subset Y$, e dunque si deve avere $T \subset D_i$. Dunque abbiamo trovato un elemento di $\mathcal{F}_0$, e quindi di $\mathcal{F}$, monocromatico, come volevasi dimostrare.

2 Esercizio 2

Definizione 2.1. Sia X un insieme; $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, si dice debolmente regolare per partizioni su X (WPR) se $\forall X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, $\exists F \in \mathcal{F} \wedge \exists 1 \leq i \leq r$, tali che $F \subset C_i$.

Definizione 2.2. Sia X un insieme; $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, si dice fortemente regolare per partizioni (SPR) su X se $\forall F \in \mathcal{F} \wedge \forall F = C_1^{(F)} \cup \cdots \cup C_r^{(F)}$, $\exists G \in \mathcal{F} \wedge \exists 1 \leq i \leq r$, tali che $G \subset C_i^{(F)}$.

Sia X un insieme e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, una famiglia di insiemi chiusa per sovrainsieme. Dimostrare che:

1. $\mathcal{F}$ è WPR su $X \Leftrightarrow \exists \mathcal{U}$ ultrafiltro su X, tale che $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$;
2. $\mathcal{F}$ è SPR su $X \Leftrightarrow \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{U}_i$, con $\mathcal{U}_i$ ultrafiltri.

2.1 Soluzione

Osserviamo che se una famiglia di insiemi è chiusa per sovrainsieme ed è propria, allora non può contenere l'insieme vuoto. Noi possiamo supporre che le famiglie che andiamo a considerare siano proprie ($\subsetneq \mathcal{P}(X)$), poichè altrimenti le proprietà sarebbero banalmente soddisfatte.

1. Sia $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ un ultrafiltro su X, e sia $X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ una colorazione. Sfruttando le proprietà di ultrafiltro:

   $$\mathcal{U} \ni X = C_1 \cup \cdots \cup C_r \Rightarrow \exists j : C_j \in \mathcal{U} \subset \mathcal{F}.$$

   Viceversa dimostriamo che $\mathcal{G} = \{A : A^c \notin \mathcal{F}\}$ è una famiglia con la proprietà dell'intersezione finita, e quindi genera un ultrafiltro, sia $\mathcal{U}$, contenuto in $\mathcal{F}$. Poichè $\mathcal{F}$ è WPR, si ha che se dato $A \subset X$, allora uno dei due tra A e A^c è contenuto in $\mathcal{F}$; infatti se $X = A \cup A^c$, allora $\exists F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subset A \vee F \subset A^c$; per sovrainsieme allora almeno uno dei due è contenuto in $\mathcal{F}$. Dunque $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$.

   Dimostriamo che $\mathcal{U}$ esiste, cioè che $\mathcal{G}$ ha la PIF:

   sia per assurdo $\{G_1, \cdots, G_n\}$ una sottofamiglia finita di $\mathcal{G}$, tale che

   $$\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \emptyset.$$

Allora passando al complementare otteniamo una colorazione di X:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i^c;$$

ma $\mathcal{F}$ è WPR, quindi esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subset G_i^c$; per sovrainsieme $G_i^c \in \mathcal{F}$, ma questo è assurdo per definizione di $\mathcal{G}$.

2. Se $\mathcal{F}$ si scrive come unione di ultrafiltri $\{\mathcal{U}_i\}_I$, dato un elemento della famiglia, sia F, ed una sua colorazione $F = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, allora esiste un $i \in I$ tale che $F \in \mathcal{U}_i$; per le proprietà di ultrafiltro esiste un j tale che $C_j \in \mathcal{U}_i$, cioè $C_j \in \mathcal{F}$, come volevasi dimostrare.

   Viceversa sia $\mathcal{F}$ SPR, allora $\mathcal{G} = \{A : A^c \notin \mathcal{F}\}$ è un filtro.

   Sicuramente $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ (chiusa per sovrainsieme e non vuota), quindi $\emptyset \notin \mathcal{G}$;

   sia $A \in \mathcal{G}$ e sia $B \supset A$; allora $B^c \subset A^c \notin \mathcal{F}$, quindi $B^c \notin \mathcal{F}$ (altrimenti per sovrainsieme si avrebbe un assurdo), e quindi $B \in \mathcal{G}$;

   siano $A, B \in \mathcal{G}$, se per assurdo $A \cap B \notin \mathcal{G}$, allora $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$; ma $\mathcal{F}$ è SPR e chiusa per sovrainsieme quindi $A^c \in \mathcal{F} \vee B^c \in \mathcal{F}$, cioè $A \notin \mathcal{G} \vee B \notin \mathcal{G}$, assurdo.

   Per scrivere $\mathcal{F}$ come unione di ultrafiltri ora facciamo così: scegliamo un $A \in \mathcal{F}$, e dimostriamo che $\mathcal{G} \cup A$ ha la PIF, e quindi si può estendere ad un ultrafiltro, sia $\mathcal{U}_A$; è chiaro che se questo si può fare, allora risulta $\mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{U}_A$.

   Siano dunque $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$, tali che $A \cap B = \emptyset$; ma allora $B \subset A^c$, ma $B \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ è chiusa per sovrainsieme, ma $A^c \notin \mathcal{G}$, assurdo.

3 Esercizio 3

Dimostrare il teorema dei 3 colori:

Teorema 3.1. Sia X un insieme e $f : X \to X$ una funzione senza punti fissi fissi. Allora $\mathcal{F} = \{\{x, f(x)\} : x \in X\}$ non è 3-regolare su X.

4 Esercizio 4

Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato, allora sono equivalenti:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n$ tale che $n\varepsilon > 1$;
2. $\mathbb{N}$ è cofinale in $\mathbb{F}$;
3. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$;
4. non esistono infinitesimi non nulli.

4.1 Soluzione

(1⇒2) Sia per assurdo $l > 0 \in \mathbb{F}$, tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < l \Leftrightarrow nl^{-1} < 1$; ma nl^{-1} è positivo, quindi $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $mnl^{-1} > 1 \Leftrightarrow mn > l$, assurdo perche $mn \in \mathbb{N}$;

(2⇒3) Siano $r_1 < r_2 \in \mathbb{F}$, supponiamo per semplicità che siano entrambi positivi (e quindi $r_2 \neq 0$), vogliamo trovare un razionale pq^{-1} compreso tra essi. Siano $c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{N}$ tali che $d_i \neq 0$ e $c_1 d_1^{-1} > r_1 \wedge c_2 d_2^{-1} < r_2$; è sempre possibile fare ciò, poichè nel primo caso esiste $c_1 > r_1$ per ipotesi, nel secondo caso invece, dato un qualunque c_2, basta scegliere $d_2 > c_2 r_2^{-1}$, e tale d_2 esiste sempre per ipotesi. Inoltre a meno di moltplicare e dividere per uno stesso naturale, possiamo supporre $d = d_1 d_2 > (r_2 - r_1)^{-1}$.

Se uno di questi due razionali è compreso tra r_1 e r_2 abbiamo vinto; altrimenti siamo nel caso:

$$c_2 d_2^{-1} < r_1 < r_2 < c_1 d_1^{-1} \Leftrightarrow d_1 c_2 < dr_1 < dr_2 < c_1 d_2.$$

Osserviamo che $d(r_2 - r_1) > 1$ per costruzione; ma allora esiste un naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $dr_1 < n < dr_2$, e dunque nd^{-1} è il razionale cercato.

(3⇒4) Sia $\varepsilon > 0$ (positivo per semplicità). Allora esistono $p, q \neq 0 \in \mathbb{N}$ tali che $0 < pq^{-1} < \varepsilon$. Poichè $\varepsilon > 0$, allora $p_1 \geq 1$, dunque si ha $0 < q^{-1} \geq pq^{-1} < \varepsilon$, e quindi ε non è infinitesimo.

(4⇒1) Supponiamo per assurdo esista un $\varepsilon > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} : n\varepsilon < 1$; allora $\varepsilon < n^{-1}$ $\forall n$, cioè ε è infinitesimo, assurdo.

5 Esercizio 5

In $^*\mathbb{R}$ ogni insieme numerabile è limitato.

5.1 Soluzione

Sia A un sottoinsieme numerabile di $^*\mathbb{R}$; allora posso scrivere $A = \{[\sigma_1] < \cdots < [\sigma_k] < \cdots\}$, al variare di $k \in \mathbb{N}$.

Sia $^*\mathbb{N} \ni [\xi]$, con $\xi(n) = n^{\sum_{i \leq n} \sigma_i(i)}$. Allora A è limitato da $[\xi]$, infatti:

fissiamo n, mostriamo che $\{i : \xi(i) > \sigma_n(i)\} \in \mathcal{U}$ (l'ultrafiltro, non principale, con cui montiamo il modello non standard).

Sicuramente vale che $\xi(n) = n^{\sum_{i \leq n} \sigma_i(i)} > n^{\sigma_n(n)} > \sigma_n(n)$; inoltre ξ è crescente da definizione, quindi $\mathcal{U} \ni [n, \infty) \subset \{i : \xi(i) > \sigma_n(i)\}$; per sovrainsieme abbiamo dunque che $[\xi] > [\sigma_n]$, e dalla generalità di n, abbiamo che A è limitato da $[\xi]$.