Esercizi del corso di “Ultrafiltri e metodi non standard”

Giada Franz

12 maggio 2015

1 Caratterizzazioni non standard

Elenchiamo di seguito le caratterizzazioni non standard di alcune nozioni classiche.

Definizione 1.1. Data $f : A \to B$, definiamo ${}^*f$ la sua estensione non standard, cioè la funzione ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$ tale che ${}^*f([\nu]) = [f \circ \nu]$.

Definizione 1.2. Dati $\xi, \nu \in {}^*\mathbb{R}$, indichiamo $\xi \sim \nu$ se $\xi - \nu$ è infinitesimo.

Proposizione 1.3. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\xi \sim x_0$ vale che ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0. Consideriamo $\xi = [x_n] \sim x_0$ e dimostriamo che ${}^*f(\xi) - f(x_0)$ è infinitesimo. Per definizione di continuità, preso $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Visto che $\xi \sim x_0$ e quindi $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| < \delta\} \in \mathscr{U}$, vale che $\{n \in \mathbb{N} \mid |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ e quindi ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \sim x_0$ valga che ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$. Supponiamo per assurdo che f non sia continua in x_0, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in \mathbb{R}$ tale che $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. Chiamiamo $\xi = [x_n]$, allora $\xi \sim x_0$ facilmente, ma altrettanto facilmente $|{}^*f(\xi) - f(x_0)| > \varepsilon$, che contraddice l'ipotesi. $\square$

Proposizione 1.4. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se per ogni $\xi \sim \nu$ iperreali vale che ${}^*f(\xi) \sim {}^*f(\nu)$.*

Dimostrazione. Supponiamo f uniformemente continua e consideriamo $\xi = [x_n], \nu = [y_n] \in {}^*\mathbb{N}$ con $\xi \sim \nu$. Per definizione di uniforme continuità, vale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Perciò, visto che $\xi \sim \nu$ e quindi $\{n \mid |x_n - y_n| < \delta\} \in \mathscr{U}$, abbiamo che $\{n \mid |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ per ogni $\varepsilon > 0$ e di conseguenza ${}^*f(\xi) \sim {}^*f(\nu)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \sim \nu$ valga che ${}^*f(\xi) \sim {}^*f(\nu)$ e supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ con $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Chiamando quindi $\xi = [x_n]$ e $\nu = [y_n]$, si ottiene facilmente un assurdo, perché $\xi \sim \nu$, ma $|{}^*f(\xi) - {}^*f(\nu)| > \varepsilon$. $\square$

Proposizione 1.5. *Vale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se e solo se per ogni ν ipernaturale infinito $a_\nu \sim l$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede in modo molto simile alla dimostrazione della Proposizione 1.3.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$. Perciò in particolare $\{n \mid |a_n - l| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ per ogni $\varepsilon > 0$, perché $\mathscr{U}$ è un ultrafiltro non principale. Di conseguenza per ogni $\nu = [\nu_n]$ ipernaturale infinito $\{n \mid |a_{\nu_n} - l| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$, perché $\{n \mid \nu_n \geq n_0\} \in \mathscr{U}$, poiché ν è infinito, e $\mathscr{U}$ è chiuso per intersezione. Quindi $a_\nu \sim l$ per ogni ν ipernaturale infinito.

Viceversa, sia $a_\nu \sim l$ per ogni ν ipernaturale infinito. Supponiamo per assurdo che non valga $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che esiste $\nu_n \geq n$ con $|a_{\nu_n} - l| > \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo quindi $\nu = [\nu_n]$, allora vale facilmente che ν è un ipernaturale infinito, ma che $|a_\nu - l| > \varepsilon$, che è assurdo. $\square$

Proposizione 1.6. *Valgono le seguenti caratterizzazioni per i limiti superiore e inferiore:*

1. $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$ *se e solo se esiste ν ipernaturale infinito con* $\mathrm{st}(a_\nu) \geq l$.

2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = l$ *se e solo se* $l = \max\{\mathrm{st}(a_\nu) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$.

3. *$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq l$ se e solo se esiste ν ipernaturale infinito con $\mathrm{st}(a_\nu) \leq l$.*

4. *$\liminf_{n\to\infty} a_n = l$ se e solo se $l = \min\{\mathrm{st}(a_\nu) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto il punto 1. Se $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$, allora esiste una sottosuccessione $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che esiste $\lim_{n\to\infty} a_{\nu_n} \geq l$. Consideriamo allora $\nu = [\nu_n]$, che risulta un ipernaturale infinito perché la successione (ν_n) è illimitata. Per come ho scelto (ν_n), vale che $\{n \mid a_{\nu_n} > l-\varepsilon\} \in \mathscr{U}$ per ogni $\varepsilon > 0$ (poiché la disuguaglianza $a_{\nu_n} > l - \varepsilon$ vale definitivamente), perciò $a_\nu > l - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $\mathrm{st}(a_\nu) \geq l$.

Se invece esiste $\nu = [\nu_n]$ ipernaturale infinito con $\mathrm{st}(a_\nu) \geq l$, vale facilmente (in modo analogo a come appena fatto) che $\limsup_{n\to\infty} a_{\nu_n} \geq l$, da cui a maggior ragione $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$.

Il punto 2 è una facile conseguenza del punto 1, mentre i punti 3 e 4 si dimostrano in modo analogo ai punti precedenti. □

Proposizione 1.7. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, valgono le seguenti*

1. *$\bar{d}(A) = \alpha$ se e solo se $\alpha = \max\left\{\mathrm{st}\left(\frac{|{}^*A\cap[1,\nu]|}{\nu}\right) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\right\}$.*

2. *$\underline{d}(A) = \alpha$ se e solo se $\alpha = \min\left\{\mathrm{st}\left(\frac{|{}^*A\cap[1,\nu]|}{\nu}\right) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\right\}$.*

Dimostrazione. Sono entrambi facili conseguenze dei punti 2 e 4 della Proposizione 1.6. □

Proposizione 1.8. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, vale che $BD(A) = \alpha$ se e solo se per ogni ν ipernaturale infinito*

$$\max\left\{\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} \mid I \text{ intervallo di lunghezza } \nu\right\} \sim \alpha\,.$$

Dimostrazione. Definiamo la successione $a_n = \max\limits_{x\in\mathbb{N}} \dfrac{|A\cap[x+1,x+n]|}{n}$. Vogliamo innanzitutto dimostrare che dato ν ipernaturale infinito vale che

$$a_\nu = \max\left\{\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} \mid I \text{ intervallo di lunghezza } \nu\right\}\,,$$

la tesi poi seguirà dalla Proposizione 1.5.

Consideriamo quindi $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Innanzitutto, per il principio di transfer, vale che

$$a_\nu \geq \frac{|{}^*A \cap I|}{\nu}\,,\quad \text{per ogni } I \text{ intervallo di lunghezza } \nu\,. \tag{1.1}$$

Infatti $a_n \geq \dfrac{|A\cap I|}{n}$ per $n \in \mathbb{N}$ e I intervallo di lunghezza n, per definizione di densità di Banach.

Ora, dato $\nu = [\nu_n]$, chiamiamo ξ_n il naturale che realizza $\max\limits_{x\in\mathbb{N}} \dfrac{|A\cap[x+1,x+\nu_n]|}{\nu_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e definiamo $\xi = [\xi_n]$. Abbiamo allora che $a_{\nu_n} \leq \dfrac{|A\cap[\xi_n+1,\xi_n+\nu_n]|}{\nu_n}$ e quindi per il principio di transfer

$$a_\nu \leq \frac{|{}^*A \cap [\xi+1,\xi+\nu]|}{\nu}\,. \tag{1.2}$$

Infine, unendo le Equazioni (1.1) e (1.2), otteniamo la tesi. □

Proposizione 1.9. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *A è spesso;*

2. *per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, esiste $I \subseteq {}^*A$ intervallo di lunghezza ν;*

3. *esiste $I \subseteq {}^*A$ intervallo infinito, cioè $I = [\nu,\mu]$ con $\mu - \nu$ infinito;*

4. *esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

5. *esiste $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V} \subseteq \mathcal{O}_A$.*

Dimostrazione. **1** $\iff$ **2** Per definizione, A è spesso se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $I \subseteq A$ intervallo di lunghezza n, che per il principio di transfer è equivalente a dire che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ esista $I \subseteq {}^*A$ intervallo di lunghezza ν.

2 $\implies$ **3** Ovvio.

3 $\implies$ **4** Dato $I = [\nu, \mu] \subseteq {}^*A$, considero $\xi = \nu$, allora ovviamente $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4 $\implies$ **5** Consideriamo ora $\mathscr{V} = \mathfrak{U}_\xi$ l'ultrafiltro generato da ξ, dove $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\xi \in {}^*A - n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $A - n \in \mathscr{V}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vale allora che $\{n \mid A - n \in \mathscr{V}\} = \mathbb{N} \in \mathscr{U}$ per ogni ultrafiltro $\mathscr{U}$, da cui $A \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ per ogni ultrafiltro $\mathscr{U}$, cioè $\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V} \subseteq \mathcal{O}_A$.

5 $\implies$ **1** Per ipotesi esiste $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V} \subseteq \mathcal{O}_A$, il che è equivalente ad affermare che $A - n \in \mathscr{V}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, come risulta dalla dimostrazione dell'implicazione precendente. Sappiamo però che una famiglia di insieme può essere inclusa in un ultrafiltro se e solo se ha la FIP (la proprietà dell'intersezione finita), quindi in particolare otteniamo che $(A - 1) \cap (A - 2) \cap \ldots \cap (A - n) \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e di conseguenza per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $x + 1, x + 2, \ldots, x + n \in A$, cioè A è spesso.

□

Proposizione 1.10. *Dato $B \subseteq \mathbb{N}$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *B è sindetico;*
2. *esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza minore o uguale a k;*
3. *${}^*B$ non ha buchi infiniti, cioè per ogni I intervallo infinito ${}^*B \cap I \neq \emptyset$;*
4. *per ogni $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V}) \cap \mathcal{O}_B \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. **1** $\implies$ **2** Visto che B è sindetico, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $B \cap [x + 1, x + k] \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista $\nu = [\nu_n]$ ipernaturale infinito tale che ${}^*B \cap [\nu + 1, \nu + k] = \emptyset$, questo però è assurdo per il principio di transfer, poiché $B \cap [\nu_n + 1, \nu_n + k] \neq \emptyset$.

2 $\implies$ **3** Ovvio.

3 $\implies$ **1** Supponiamo per assurdo che B non sia sindetico, allora B^c è spesso e di conseguenza esiste $I \subseteq {}^*(B^c)$ intervallo infinito, per il punto 3 della Proposizione 1.9. Vale però che ${}^*(B^c) = ({}^*B)^c$ e quindi ${}^*B \cap I = \emptyset$, che contraddice l'ipotesi.

1 $\iff$ **4** Dato $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale, $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V}) \cap \mathcal{O}_B \neq \emptyset$ se e solo se esiste $\mathscr{W}$ ultrafiltro tale che $B \in \mathscr{W} \oplus \mathscr{V}$, se e solo se $\{n \mid B - n \in \mathscr{V}\} \neq \emptyset$, se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ con $B - n \in \mathscr{V}$.

Per ogni $\mathscr{V}$ non principale esiste $n \in \mathbb{N}$ con $B - n \in \mathscr{V}$ se e solo se la famiglia $\{(B - n)^c\}$ non ha la FIP, se e solo se esistono $n_1, \ldots, n_k$ tali che $(B - n_1)^c \cap \ldots \cap (B - n_k)^c = \emptyset$, se e solo se $(B - n_1) \cup \ldots \cup (B - n_k) = \mathbb{N}$, se e solo se B è sindetico.

□

Proposizione 1.11. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, A è sindetico a tratti se e solo se esiste I intervallo infinito tale che ${}^*A \cap I$ ha buchi finiti.*

Dimostrazione. Basta ricordare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se e solo se è sindetico su un insieme spesso e applicare i punti 3 e 2 rispettivamente delle Proposizioni 1.9 e 1.10. □

Proposizione 1.12. *Dati $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{fe} B$ se e solo se esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\xi + A \subseteq {}^*B$.*

Dimostrazione. Se $A \leq_{fe} B$, chiamiamo $\Delta_a = \{x \in \mathbb{N} \mid x + a \in B\}$ per ogni $a \in A$. Per ipotesi la famiglia $\{\Delta_a \mid a \in A\}$ ha la FIP ed è numerabile, perciò per $\aleph_0$-enlargement esiste $\xi \in \cap_{a \in A} {}^*\Delta_a$ ed è facile osservare che $\xi + A \subseteq {}^*B$.

Viceversa, supponiamo che esista $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ con $\xi + A \subseteq {}^*B$. Sia $F = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ finito. Sappiamo che $\xi + a_i \in {}^*B$ per ogni $i = 1, \ldots, k$, perciò per transfer esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $x + a_i \in B$ per ogni $i = 1, \ldots, k$, cioè $x + F \subseteq B$, da cui la tesi. □