# Esercizi del Corso “Ultrafiltri e Metodi Non Standard”

Federico Glaudo

11 maggio 2015

## 1 Gli ideali di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$

Daremo per scontato che l'operazione di semigruppo che poniamo su $\beta\mathbb{N}$ è $\oplus$.

**Definizione 1.1.** Dato un filtro $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$, sia $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subseteq \beta\mathbb{N}$ la famiglia di ultrafiltri che estende il filtro $\mathcal{F}$.

**Lemma 1.2.** *Dato un filtro $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$, la famiglia $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ è un chiuso in $\beta\mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Per definizione della topologia di $\beta\mathbb{N}$ gli le famiglie $\mathcal{O}_A$ con $A \subseteq \mathbb{N}$ sono chiusi, quindi anche $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{O}_F$ è un chiuso. □

**Lemma 1.3.** *Dato un filtro $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$, la famiglia $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ è un ideale sinistro in $\beta\mathbb{N}$ se e soltanto se per ogni $F \in \mathcal{F}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $F - n \in \mathcal{F}$.*

*Dimostrazione.* La famiglia $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ è un ideale sinistro se e solo se per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e per ogni $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ vale $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Ciò equivale ad affermare che per ogni $F \in \mathcal{F}$, risulta

$$\forall \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\,, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}} : F \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \iff \{n : F - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

e visto che ciò deve valere per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$, otteniamo che è equivalente a

$$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}\,, n \in \mathbb{N} : F - n \in \mathcal{V}\,.$$

Questo però deve valere per ogni $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ e quindi, visto che l'intersezione di tali ultrafiltri è proprio $\mathcal{F}$, la tesi segue. □

**Lemma 1.4.** *Dato un filtro $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$, la famiglia $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ è un ideale destro in $\beta\mathbb{N}$ se e soltanto se per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ vale*

$$\forall F \in \mathcal{F} : \{n : F - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{F}\,.$$

*Dimostrazione.* La famiglia $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ è un ideale destro se e solo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e per ogni $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ vale $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Ciò equivale ad affermare che per ogni $F \in \mathcal{F}$, risulta

$$\forall \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\,, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}} : F \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \iff \{n : F - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\,,$$

ma questo deve valere per ogni $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ e, visto che l'intersezione di tali ultrafiltri è proprio $\mathcal{F}$, la tesi segue. □

**Proposizione 1.5.** *Chiamando $\Delta = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in \mathcal{U}\ \ \mathrm{BD}(A) > 0\}$, la famiglia $\Delta$ risulta essere un ideale bilatero chiuso in $\beta\mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Chiamiamo $\mathcal{F}$ il filtro $\{A \subseteq \mathbb{N} : \mathrm{BD}(A^{\mathsf{c}}) = 0\}$[1]. È facile accorgersi che $\Delta = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ e ciò ci permette di applicare i lemmi precedenti.

Grazie al Lemma 1.2, l'insieme $\Delta$ risulta topologicamente chiuso.

In virtù del Lemma 1.3, $\Delta$ è un ideale sinistro se e solo se, dato $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\mathrm{BD}(A^{\mathsf{c}}) = 0$, anche tutti i traslati $A - n$ sono tali che $\mathrm{BD}\left((A-n)^{\mathsf{c}}\right) = 0$. Ma questo è vero visto che vale in generale $\mathrm{BD}\left((A-n)^{\mathsf{c}}\right) = \mathrm{BD}(A^{\mathsf{c}} - n) = \mathrm{BD}(A^{\mathsf{c}})$.

Per verificare che $\Delta$ sia un ideale destro, applicando il Lemma 1.4, è sufficiente verificare che, per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e per ogni $A$ tale che $\mathrm{BD}(A^{\mathsf{c}}) = 0$, vale $\{n : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{F}$. Chiamando $B = A^{\mathsf{c}}$, quest'ultima affermazione equivale ad affermare che $\mathrm{BD}\left(\{n : B - n \in \mathcal{U}\}\right) = 0$. Riassumendo dobbiamo dimostrare l'implicazione

$$\mathrm{BD}(B) = 0 \implies \mathrm{BD}\left(\{n : B - n \in \mathcal{U}\}\right) = 0\,.$$

Assumiamo per assurdo che l'implicazione sia falsa e cioè che la densità di Banach del secondo insieme sia maggiore di $\epsilon > 0$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una sequenza crescente $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tale che tutti appartengono a $\{n : B - n \in \mathcal{U}\}$ e "realizzano" la densità di Banach, cioè $\frac{k}{n_k - n_1} \geq \epsilon$.

Per le proprietà di ultrafiltro di $\mathcal{U}$, l'insieme $\bigcap_{i \leq k}(B - n_i)$ è non vuoto e perciò esiste $m$ in tale insieme. Quindi vale che tutti gli elementi $m + n_1, m + n_2, \ldots, m + n_k$ appartengono a $B$ e vale anche che $\frac{k}{m + n_k - (m + n_1)} = \frac{k}{n_k - n_1} \geq \epsilon$. Ma ciò dimostra che $\mathrm{BD}(B) \geq \epsilon$ e ciò è assurdo. □

**Proposizione 1.6.** *Chiamando* $\overline{\Delta} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in \mathcal{U}\ \ \bar{\mathrm{d}}(A) > 0\}$*, la famiglia* $\overline{\Delta}$ *risulta essere un ideale chiuso sinistro ma non destro in* $\beta\mathbb{N}$*.*

*Dimostrazione.* Chiamiamo $\mathcal{F}$ il filtro $\{A \subseteq \mathbb{N} : \bar{\mathrm{d}}(A^{\mathsf{c}}) = 0\}$[2]. È facile accorgersi che $\overline{\Delta} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ e ciò ci permette di applicare i lemmi precedenti.

Il fatto che $\overline{\Delta}$ sia un ideale chiuso sinistro si dimostra *esattamente* come abbiamo dimostrato nella Proposizione 1.5 che $\Delta$ è un ideale chiuso sinistro.

Ragionando *esattamente* come abbiamo ragionato nella dimostrazione della Proposizione 1.5, otteniamo che dimostrare che $\overline{\Delta}$ *non* è un ideale destro equivale ad affermare che esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ ed un insieme $B$ con $\bar{\mathrm{d}}(B) = 0$ tali che

$$\bar{\mathrm{d}}\left(\{n : B - n \in \mathcal{U}\}\right) > 0\,.$$

Come insieme $B$ scegliamo un insieme spesso con densità superiore nulla[3]. A questo punto è facile accorgersi che la famiglia $(B - n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e perciò esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che la estende. Scegliendo in questo modo l'insieme $B$ e l'ultrafiltro $\mathcal{U}$ vale $\{n : B - n \in \mathcal{U}\} = \mathbb{N}$ e perciò la tesi risulta dimostrata. □

**Proposizione 1.7.** *Se* $L \subseteq \beta\mathbb{N}$ *è un ideale sinistro, allora anche la sua chiusura* $\overline{L}$ *lo è.*

*Dimostrazione.* Assumiamo per assurdo che esistano $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e $\mathcal{V} \in \overline{L}$, tali che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \notin \overline{L}$.

Allora, per la topologia di $\beta\mathbb{N}$, esiste un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ e $\mathcal{O}_A \cap L = \emptyset$. Visto che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, esiste di certo un intero $n$ tale che $A - n \in \mathcal{V}$ e

[1] È facile verificare che questo è un filtro, fondamentalmente perché la densità di Banach è subadditiva.

[2] È facile verificare che anche questo è un filtro, fondamentalmente perché la densità superiore è subadditiva.

[3] Tali insiemi esistono per la densità superiore (basta prendere uno spesso molto rarefatto), ma non esistono per la densità di Banach e ciò fa sì che $\Delta$ sia bilatero e $\overline{\Delta}$ no.

quindi $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{A-n}$. Allora, per definizione di chiusura, vale che $\mathcal{O}_{A-n} \cap L \neq \emptyset$ e perciò esiste $\mathcal{V}' \in L$ con $A - n \in \mathcal{V}'$. Identificando con $n$ l'ultrafiltro principale generato da $n$, è evidente che $A \in n \oplus \mathcal{V}' \in L$ e ciò porta all'assurdo. $\square$