27 aprile

Esercizio

$A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{V} \Rightarrow A+B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

Soluzione

So che $A+B \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{V} \iff \{n \mid A+B-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$ con $A+B-n = \{m \mid m+n = a+b,\ a\in A,\ b \in B\}$.

Se $n \in B$ allora $\forall n \in A$ $m+n \in A+B$ e quindi $A \subseteq A+B-n$. Ma $A \in \mathcal{U}$

e dunque $A+B-n \in \mathcal{U}$, $\forall n \in B$. Dunque $B \subseteq \{n \mid A+B-n \in \mathcal{U}\}$ e quindi,

poiché $B \in \mathcal{V}$ anche $\{n \mid A+B-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, ovvero $A+B \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$.

Esercizio

$\exists X$ infinito t.c. $X \oplus X \subseteq A$ con $\{x+x' \mid x \neq x'\ x,x' \in X\} \iff \exists \mathcal{U}$ non principale con $A \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$

Sia $\mathcal{U}$ non principale che contiene X. Per lo scorso esercizio $X \oplus X \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}$

Ma $X \oplus X \subseteq A$ e quindi $A \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Costruiamo X induttivamente. $A \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{U} \iff \hat{A} = \{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Sia b_1

un qualunque elemento di $\hat{A}$. Allora $A - b_1 \in \mathcal{U}$ e quindi $\hat{A} \cap (A-b_1)$

è infinito. Sia dunque $b_2 \in \hat{A} \cap (A-b_1)$. Procedo induttivamente prendendo

$b_{n+1} \in \hat{A} \cap \bigcap_{i=1}^{n} (A-b_i)$. Allora se $m > n$ $b_m \in A - b_n$ e quindi $b_m + b_n \in A$.

Da cui, se $X = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $X \oplus X \subseteq A$.

Esercizio

$\exists X, Y$ infiniti con $X+Y \subseteq A \iff \exists \mathcal{U},\mathcal{V}$ non-principali con $A \in (\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}) \cap (\mathcal{V}\oplus\mathcal{U})$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$ Siano $\mathcal{U},\mathcal{V}$ non principali tali che $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathcal{V}$, allora $X+Y \in \mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$

e $X+Y = Y+X \in \mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $A \in (\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}) \cap (\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}) \iff \hat{A}_1 = \{n \mid A-n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ e $\hat{A}_2 = \{m \mid A-m \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$.

Sia b_1 un qualsiasi elemento di $\hat{A}_1$ e sia $c_1 \in \hat{A}_2 \cap (A-b_1)$. Procedo

induttivamente: prendo $b_{n+1} \in \hat{A}_1 \cap \bigcap_{i=1}^{n} (A-c_i)$ e $c_{n+1} \in \hat{A}_2 \cap \bigcap_{i=1}^{n} (A-b_i)$.

Allora, se, WLOG, $m > n$ $b_m \in A - c_n$ e quindi $b_n + c_n \in A$. Se

pongo $X = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $Y = \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ho dunque $X+Y \subseteq A$

28 aprile

Esercizio

Sia $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $k \in \mathbb{N}$. Allora $\{ n^k \vartheta \pmod 1 \mid n \in \mathbb{N} \}$ è un insieme denso in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soluzione

MANCA.

4 maggio

Esercizio

A spesso $\iff \exists\, \mathcal{U}$ non principale tale che $\beta\mathbb{N}\oplus\mathcal{U}\subseteq O_A$, cioè $A\in\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\ \forall\mathcal{V}$.

Soluzione

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\mathcal{V}_n$ l'ultrafiltro principale generato da n. Per ipotesi $\forall k$

$$A\in\mathcal{V}_k\oplus\mathcal{U}$$

cioè

$$\{n \mid A-n\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{V}_k \implies A-k\in\mathcal{U}$$

Allora $\forall m$ posso considerare $(A-1)\cap\dots\cap(A-m)$ che è non vuoto perché stanno tutti in $\mathcal{U}$. Allora $\exists r$ tale che $r\in A-1, \ldots, r\in A-m$, cioè $r+1,\ldots,r+m\in A$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ordiniamo $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$. Sia $\alpha[i]=\min\{m\in\mathbb{N} \mid [m,m+i]\subseteq A\}$. Allora sia $\mathcal{U}=\mathcal{U}_\alpha$ e vedo che, dato $\mathcal{V}$ ultrafiltro qualunque:

$$A\in\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}_\alpha \iff \{n \mid A-n\in\mathcal{U}_\alpha\}\in\mathcal{V}\iff\{n\mid \alpha\in {}^*A-n\}\in\mathcal{V}\iff\{n\mid \alpha+n\in{}^*A\}\in\mathcal{V}.$$

Ora, $\alpha+n\in{}^*A \iff \{i\mid \alpha[i]+n\in A\}\in\mathcal{W}$ con ${}^*\mathbb{N}=\mathbb{N}^\mathbb{N}/\mathcal{W}$. Ma

$$\{i\mid \alpha[i]+n\in A\}=\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,n\}$$

per definizione di α. Quindi, essendo cofinito ho che, per ogni n

$$\{i\mid\alpha[i]+n\in A\}\in\mathcal{W}$$

e quindi $\{n\mid \alpha+n\in{}^*A\}=\mathbb{N}\in\mathcal{V}$.

Esercizio

A sindetico $\iff \forall\mathcal{U}$ non principale $(\beta\mathbb{N}\oplus\mathcal{U})\cap O_A\neq\emptyset$.

Soluzione

A sindetico $\iff A^C$ non è spesso $\iff\forall\mathcal{U}$ non principale $\beta\mathbb{N}\oplus\mathcal{U}\not\subseteq O_{A^c}=\beta\mathbb{N}\setminus O_A \iff$

$$\iff \forall\mathcal{U} \text{ non principale } (\beta\mathbb{N}\oplus\mathcal{U})\cap O_A\neq\emptyset.$$

Esercizio

I, J ideale minimale. Allora $\exists y \; J = I * y$.

Soluzione

J è un ideale sx, quindi $\forall y \in J \; \forall x \in X \; x * y \in J$. In particolare, vale

$\forall y \in J \; \forall x \in I \; x * y \in J$. Allora $I * y \subseteq J$. $I * y$ è un ideale, infatti:

$\forall z \in X \; \forall x \in I \; z * (x * y) = \overbrace{(z * x)}^{\in I} * y \in I * y$. Ma J è ideal. minimale e

quindi $J = I * y$.

Nota
non ho usato I minimale. Non capisco dove sia sbagliato però.

Esercizio

Sia L ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus) \Rightarrow \bar{L}$ è ideale sinistro.

Soluzione

Sia $\mathcal{U} \in \bar{L}$ e $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, voglio $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \bar{L}$. Sia U un intorno di $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ e sia $V = \Psi_{\mathcal{U}}^{-1}(U)$, che è un intorno di $\mathcal{V}$ perché $\Psi_{\mathcal{U}}$ è continua. Sia $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\alpha$ un ultrafiltro principale in V (che esiste perché i principali sono densi in $\beta\mathbb{N}$). Ora, $\mathcal{W}_\alpha \oplus \mathcal{U} \in U$, perché $\mathcal{W}_\alpha \in V$, quindi posso trovare un intorno W di $\mathcal{U}$ tale che $\mathcal{W}_\alpha \oplus W \subseteq U$ perché la $\theta_{\mathcal{V}'} : \mathcal{U}' \mapsto \mathcal{V}' \oplus \mathcal{U}'$ è continua se $\mathcal{V}'$ è principale. Allora prendo $\mathcal{Z} \in W \cap L$ e vedo che $\mathcal{W}_\alpha \oplus \mathcal{Z} \in U$ per costruzione e $\mathcal{W}_\alpha \oplus \mathcal{Z} \in L$ perché L ideale sinistro. Poiché trovo un tale ultrafiltro per ogni intorno di $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, ho che $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \bar{L}$.

ES

$\Delta \overset{def}{=} \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \forall A \in \mathcal{U} \;\; BD(A) > 0\}$ è ideale bilatero

Soluzione

Ideale sinistro

Sia $\mathcal{U} \in \Delta$ e $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Voglio $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \Delta$. Ho che

$$A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \iff \hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Allora $\hat{A} \neq \emptyset$. Sia $\bar{n} \in \hat{A}$, $A - \bar{n} \in \mathcal{U} \in \Delta \Rightarrow BD(A - \bar{n}) > 0$. Ma la densità di Banach di un traslato è la stessa, quindi $BD(A) > 0$ e $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \Delta$.

Ideale destro

Sia $\mathcal{U} \in \Delta$ e $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Voglio $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Ho che

$$A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \iff \hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Quindi $BD(\hat{A})>0$. Possiamo supporre che $\mathcal{V}=\mathcal{V}_\alpha$, $\alpha\in{}^*\mathbb{N}$. Allora

$$\hat{A}=\{n \mid \alpha+n\in{}^*A\}$$

Allora $\hat{A}+\alpha\subseteq{}^*A$ e per la caratterizzazione non-standard di finita immergibilità questo equivale a $\hat{A}\leq_{fe}A$. Ma se $B\leq_{fe}C\Rightarrow BD(B)\leq BD(C)$ e quindi $BD(A)>0$ e $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\in\Delta$.

Esercizio

$vdW=\{\mathcal{U}\in\beta\mathbb{N} \mid \forall A\in\mathcal{U}\ \ A$ è AP-rich$\}$ è ideale bilatero

Solutione

Ideale sinistro.

Sia $\mathcal{U}\in vdW$ e $\mathcal{V}\in\beta\mathbb{N}$. Voglio $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\in vdW$. Ho che:

$$A\in\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\iff\hat{A}=\{n \mid A-n\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{V}$$

Quindi esiste almeno un $\bar{n}$ tale che $A-\bar{n}\in\mathcal{U}\in vdW$, quindi $A-\bar{n}$ è AP-rich. Ma essere AP-rich è invariante per traslazioni e quindi A è AP-rich e $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}\in vdW$.

Ideale destro

Sia $\mathcal{U}\in vdW$ e $\mathcal{V}\in\beta\mathbb{N}$. Voglio $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\in vdW$. Ho che:

$$A\in\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\iff\hat{A}=\{n \mid A-n\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$$

Quindi $\hat{A}$ è AP-rich. Posso supporre che $\mathcal{V}=\mathcal{V}_\alpha$ con $\alpha\in{}^*\mathbb{N}$. Allora

$$\hat{A}=\{n \mid \alpha+n\in{}^*A\}$$

Allora $\hat{A}+\alpha\subseteq{}^*A$ e per la caratterizzazione non-standard di finita immergibilità questo equivale a $\hat{A}\leq_{fe}A$. Ma allora anche A è AP-rich e $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\in vdW$.

Esercizio

Δ è ideale sx non dx in $(\beta\mathbb{N},\odot)$

Soluzione

Ideale sinistro

Sia $\mathcal{U}\in\Delta$ e $\mathcal{V}\in\beta\mathbb{N}$. Voglio $\mathcal{V}\odot\mathcal{U}\in\Delta$. Ho che

$$A\in\mathcal{V}\odot\mathcal{U}\iff\hat{A}=\{n \mid \tfrac{A}{n}\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{V}$$

Allora $\hat{A}\neq\emptyset$ e esiste almeno un $\bar{n}$ tale che $BD(\frac{A}{\bar{n}})>0$. Ma

$\frac{A}{\bar{n}} = \{m \mid m\cdot\bar{n} \in A\}$ e

$$BD\left(\frac{A}{\bar{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{\left|\frac{A}{\bar{n}} \cap [x, x+n)\right|}{n}$$

Fisso n, sia $\bar{x}$ tale che $\frac{\left|\frac{A}{\bar{n}} \cap [\bar{x}, \bar{x}+n)\right|}{n} = \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{\left|\frac{A}{\bar{n}} \cap [x, x+n)\right|}{n}$

Ho che $\frac{\left|\frac{A}{\bar{n}} \cap [\bar{x}, \bar{x}+n)\right|}{n} = \frac{|A \cap [\bar{n}\bar{x}, \bar{n}\bar{x} + \bar{n}n)|}{\bar{n}n}$. Quindi [1]

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A\cap [x, x+n)|}{n} = \lim_{\bar{n}n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A\cap [\bar{n}x, \bar{n}x+\bar{n}n)|}{\bar{n}n} \geq BD\left(\frac{A}{\bar{n}}\right) > 0$$

[1] per il lemma di Fekete posso scrivere lim invece di liminf

Non è ideale destro

MANCA

Esercizio

$\bar{I} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \forall A \in \mathcal{U} \ \bar{d}(A) > 0\}$ è ideale sx non dx in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$

Soluzione

Ideale sinistro

Sia $\mathcal{U} \in \bar{I}$ e $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Voglio $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \bar{d}$. Ho che:

$$A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \iff \hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$$

Quindi esiste almeno un $\bar{n}$ tale che $A - \bar{n} \in \mathcal{U} \in \bar{I}$. Quindi $\bar{I}(A - \bar{n}) > 0$. Ma $\bar{d}$ è invariante per traslazioni e quindi $\bar{I}(A) > 0$ e $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \bar{I}$.

Non è ideale destro

MANCA