Ordine di Rudin-Keisler e ultrafiltri selettivi in $\beta\mathbb{N}$

1. *Sia $\mathfrak{U}$ ultrafiltro su I, e siano $f, g : I \to J$, valgono le seguenti proprietà:*
(1) Se $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$, allora $f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$.
(2) Se $f(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$ allora $f \equiv_{\mathfrak{U}} id$.
(3) Se $f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$ e f è biettiva allora $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$.

Dimostrazione. (1) Sia $A \in f(\mathfrak{U})$, allora per definizione si ha che $f^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$. Inoltre, poiché $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$, $\{i \in I | f(i) = g(i)\} \in \mathfrak{U}$. Quindi si ha che $\mathfrak{U} \ni f^{-1}(A) \cap \{i \in I | f(i) = g(i)\} \subseteq g^{-1}(A)$, dunque $g^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$, da cui $A \in g(\mathfrak{U})$. Allo stesso modo si mostra che $g(\mathfrak{U}) \subseteq f(\mathfrak{U})$.
(2) Sia I' l'insieme dei punti fissi di f, mostriamo che $I' \in \mathfrak{U}$. Se per assurdo $I' \notin \mathfrak{U}$ allora $I'' = (I')^c \in \mathfrak{U}$ e $f_{|_{I''}}$ non ha punti fissi. Dunque, per il teorema dei tre colori, esiste una tre-colorazione di I'', $I'' = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$, tale che per ogni $i \in I''$, i e $f(i)$ hanno colori diversi. Poiché $I'' \in \mathfrak{U}$ uno tra C_1, C_2, C_3 appartiene a $\mathfrak{U}$, diciamo C_1. Ma allora $\mathfrak{U} \ni f^{-1}(C_1) = \{i \in I | f(i) \in C_1\} \subseteq C_1^c$, quindi $C_1^c \in \mathfrak{U}$ e questo è assurdo.
(3) Sia $\mathfrak{V} = f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$. Poiché f è biettiva $f^{-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{U}$. Ora $f^{-1}(g(\mathfrak{U})) = f^{-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{U}$, dunque per il punto (2) si ha che $f^{-1}g \equiv_{\mathfrak{U}} id$, cioè $\{i \in I | f^{-1}(g(i)) = i\} = \{i \in I | f(i) = g(i)\} \in \mathfrak{U}$, da cui $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$. □

2. *L'ordine $\leq_{RK}$ non ha elementi massimali.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che per ogni ultrafiltro non principale $\mathfrak{U} \leq_{RK} \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U} \not\leq_{RK} \mathfrak{U}$. Sia $\pi_1 : I \times I \to I$ la proiezione sulla prima componente, si ha che $\pi_1(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$. Infatti se $A \in \mathfrak{U}$ allora $\{i \in I | \{j \in I | (i,j) \in I \times A\} \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{U}$, cioè $I \times A = \pi_1^{-1}(A) \in \mathfrak{U}$. Viceversa se $A \in \pi_1(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U})$ allora $\pi_1^{-1}(A) = I \times A \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}$, cioè $A \in \mathfrak{U}$. Vediamo ora che $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U} \not\leq_{RK} \mathfrak{U}$. Se per assurdo esistesse una biezione $g : I \times I \to I$ tale che $g(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$, allora $g \equiv_{\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}} \pi_1$, cioè $A = \{(i,j) \in I \times I | g(i,j) = \pi_1(i,j)\} \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{U}$, quindi $\{i \in I | \{j \in I | (i,j) \in A\} \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{U}$, dunque $\{j \in I | g(i,j) = i\} \in \mathfrak{U}$ ed essendo $\mathfrak{U}$ non principale questo è assurdo. □

3. *Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro non principale su $\beta\mathbb{N}$, le seguenti sono equivalenti:*
(1) $\mathfrak{U}$ è minimale secondo l'ordine di Rudin-Keisler in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$;
(2) $\mathfrak{U}$ è selettivo;
(3) Per ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $A \in \mathfrak{U}$ tale che $f_{|_A}$ è costante oppure iniettiva;
(4) Ogni $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{U}$ è tale che $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$, con g costante oppure bigezione.

Dimostrazione. (1)⇒(2) Sia $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ una partizione di $\mathbb{N}$ tale che $A_i \notin \mathfrak{U}$, per ogni i, e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(A_i) = i$. Si ha che $f(\mathfrak{U})$ è un ultrafiltro non principale, altrimenti uno degli A_i apparterrebbe ad $\mathfrak{U}$, poiché $\mathfrak{U}$

è minimale esiste una biezione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$. Quindi $X = \{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\} \in \mathfrak{U}$, in particolare $f_{|X}$ è iniettiva, dunque $X \cap A_i$ ha al più un elemento per ogni i, per ottenere il selettore basta aggiungere un elemento di A_i dove l'intersezione con X è vuota.
(1)⇒(3) Poiché $\mathfrak{U}$ è minimale per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che $f(\mathfrak{U})$ è non principale, esiste una biezione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$. Dunque $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$, da cui segue che f è iniettiva su un elemento dell'ultrafiltro. Se invece $f(\mathfrak{U})$ è principale, allora esiste $a \in \mathbb{N}$ tale che $\{a\} \in f(\mathfrak{U})$, quindi $f^{-1}(a) \in \mathfrak{U}$, cioè f è costante su un elemento dell'ultrafiltro.
(2)⇒ (3) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione, se $Im(f) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ è finita allora $\mathbb{N} = f^{-1}(a_1) \sqcup \ldots \sqcup f^{-1}(a_m)$, quindi esiste i tale che $f^{-1}(a_i) \in \mathfrak{U}$. Supponiamo dunque che $Im(f) = \{a_1 < \ldots < a_n < \ldots\}$ sia infinita e che f non sia costante su alcun elemento di $\mathfrak{U}$. Si ha la partizione $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(a_i)$, con $f^{-1}(a_i) \notin \mathfrak{U}$ per ogni i. Quindi per ipotesi esiste $X \in \mathfrak{U}$ tale che $X \cap f^{-1}(a_i) = \{b_i\}$, dunque $f_{|X}$ è iniettiva.
(3)⇒(2) Sia $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ una partizione tale che $A_i \notin \mathfrak{U}$, per ogni i e consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(A_i) = i$, f è costante solo sugli A_i, allora esiste $X \in \mathfrak{U}$ tale che $f_{|X}$ è iniettiva, dunque, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $X \cap A_i$ ha al più un elemento.
(1)⇒(4) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se $f(\mathfrak{U})$ è principale allora esiste $A \in \mathfrak{U}$ tale che $f(A) = \{a\}$, altrimenti esiste g biezione tale che $f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$, dunque $g \equiv_{\mathfrak{U}} f$.
(4)⇒(1) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$, con g costante allora $f(\mathfrak{U})$ è principale, se invece g è una bigezione allora $f(\mathfrak{U}) = g(\mathfrak{U})$ e dunque $f(\mathfrak{U}) \cong \mathfrak{U}$.
Per completare la dimostrazione manca una tra (3)⇒(1), (2)⇒(1), (3)⇒(4).

□