# Una equivalenza sugli spessi e famiglie duali

Gioacchino Antonelli

7 Maggio

**Esercizio 0:** *$A$ è spesso se e solo se esiste un $\mathcal{V}$ ultrafiltro non principale tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_A$ ovvero $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \forall \mathcal{U}$.*

*Dimostrazione:* Se $A$ è spesso, ho mostrato in un pdf precedente, che esiste un $\xi \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tale che $A_\xi = \{n | \xi + n \in {}^\star A\} = \mathbb{N}$. Scelgo $\mathcal{V} = \sqcup_\xi := \{B \subseteq \mathbb{N} | \xi \in {}^\star B\}$. Abbiamo osservato a lezione che $\sqcup_\xi$ è un ultrafiltro non principale, poiché $\xi$ è infinito. Provo che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Infatti $\{n | A - n \in \mathcal{V}\} = \{n | \xi \in {}^\star A - n\} = \mathbb{N}$ per quanto detto precedentemente. Dunque $\{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ qualunque sia la scelta di $\mathcal{U}$.

Viceversa, se $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \forall \mathcal{U}$ allora $\{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ qualunque sia la scelta di $\mathcal{U}$. Ciò significa che $\{n | A - n \in \mathcal{V}\}$ deve necessariamente essere $\mathbb{N}$ poiché appartiene a tutti gli ultrafiltri. Ma allora, essendo in un modello in cui vale il $c$-enlargement, per ogni $\mathcal{V}$ non principale esiste uno $\xi$ ipernaturale infinito tale che $\mathcal{V} = \sqcup_\xi$. Dunque $A - n \in \sqcup_\xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque $\xi + n \in {}^\star A \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Per l'equivalenza su citata dimostrata in un pdf precedente, allora $A$ è spesso.

Dalla precedente equivalenza se ne deduce *tout court* una successiva, notando che $A$ sindetico $\Leftrightarrow$ $A^c$ non è spesso. Dunque $A$ sindetico se e solo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{V}$ non principale, esiste un certo ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $A^c \notin \mathcal{U} \oplus V$, ovvero $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, ovvero $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$. Dunque

**Corollario 0:** *$A$ è sindetico se e solo se per ogni $\mathcal{V}$ non principale, $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$, ovvero se e solo se per ogni $\mathcal{V}$ non principale, esiste un certo $\mathcal{U}$ tale che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.*

*Osservazioni Iniziali*: Chiarisco alcune definizioni e convenzioni.

- Salvo indicazioni contrarie, tutte le famiglie $\mathcal{F}$ considerate da ora in poi saranno non vuote, costituite da sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e chiuse per soprainsiemi.
- Una famiglia $\mathcal{F}$ è W.P.R. (*Weakly partition regular*) se $\forall \mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ esiste $F \in \mathcal{F}$ ed esiste $1 \leq i \leq r$ tale che $F \subseteq C_i$. (Vista la chiusura per soprainsiemi, la W.P.R. si può riformulare dicendo che in realtà (almeno) uno dei $C_i$ deve appartenere a $\mathcal{F}$)
- Una famiglia $\mathcal{F}$ è P.R. (*Partition Regular*) se $\forall C_1 \cup \cdots \cup C_r \in \mathcal{F}$ esiste $F \in \mathcal{F}$ ed esiste $1 \leq i \leq r$ tale che $F \subseteq C_i$. (Vista la chiusura per soprainsiemi, la P.R. anche si può dicendo che in realtà uno dei $C_i$ deve appartenere a $\mathcal{F}$)
- Data una famiglia $\mathcal{F}$ si dice che $\mathcal{F}^\star := \{A \subseteq \mathbb{N} | A \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}\}$

**Osservazione 1:** *Valgono le seguenti:*

1. $\mathcal{F}^\star = \{A \subseteq \mathbb{N} | A^c \notin \mathcal{F}\}$
2. $(\mathcal{F}^\star)^\star = \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}^\star \supseteq \mathcal{G}^\star$
4. $\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)^\star = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i^\star$
5. $\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)^\star = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i^\star$

*Dimostrazione:*

1. Devo mostrare che $X = \{A \subseteq \mathbb{N} | A \cap F \neq \emptyset \quad \forall F \in \mathcal{F}\} = \{A \subseteq \mathbb{N} | A^c \notin \mathcal{F}\} = Y$. Se $A \in X$ ma per assurdo $A \notin Y$, allora $A^c \in \mathcal{F}$. Ma essendo $A \in X$ e $A^c \in \mathcal{F}$, $A \cap A^c \neq \emptyset$ che è assurdo. Se $A \in Y$ ma per assurdo $A \notin X$ allora esiste un $F \in \mathcal{F}$ tale che $A \cap F = \emptyset$. Ma allora, $F \subseteq A^c$. D'altra parte, vista la chiusura per soprainsieme, $A^c \in \mathcal{F}$, che è assurdo poiché $A \in Y$. Dunque $X = Y$.
2. $A \in (\mathcal{F}^\star)^\star \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}^\star \Leftrightarrow (A^c)^c = A \in \mathcal{F}$.
3. Mostro $(\Rightarrow)$. Usando la caratterizzazione di (1), ho che se $A \in \mathcal{G}^\star$, allora $A^c \notin \mathcal{G}$. Siccome $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, allora $A^c \notin \mathcal{F}$. Dunque $A \in \mathcal{F}^\star$. La $(\Leftarrow)$ si mostra applicando all'ipotesi la proprietà (2) e utilizzando il fatto precedente che passare alle famiglie duali rovescia le inclusioni.
4. $A \in \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)^\star \Leftrightarrow A^c \notin \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i\right) \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}_i \forall i \in I \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_i^\star \forall i \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i^\star$.
5. Si ottiene immediatamente dalla precedente usando $\mathcal{F}_i^\star$ e passando al duale.

**Esercizio 1:** *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia (con le convenzioni viste sopra). Mostrare che $\mathcal{F}^\star$ è un filtro se e solo se $\mathcal{F}$ è P.R.*

*Dimostrazione:* Mostro ($\Leftarrow$). Suppongo $\mathcal{F}$ P.R. Allora sia $A \in \mathcal{F}^\star$. Dunque $A^c \notin \mathcal{F}$. Se $B \supseteq A$, allora $A^c \supseteq B^c$ e dunque, vista la chiusura per sopra insieme della famiglia, $B^c \notin \mathcal{F}$ da cui $B \in \mathcal{F}^\star$ e dunque $\mathcal{F}^\star$ è chiuso per soprainsieme.

Siano ora $X, Y \in \mathcal{F}^\star$. Dunque $X^c \notin \mathcal{F}$ e $Y^c \notin \mathcal{F}$. La loro unione $X^c \cup Y^c$ non può stare in $\mathcal{F}$, poiché vista la definizione di famiglia P.R. e vista la chiusura per soprainsiemi ciò significherebbe che uno dei due dovrebbe stare in $\mathcal{F}$. Dunque $(X \cap Y)^c \notin \mathcal{F}$ e dunque $X \cap Y \in \mathcal{F}^\star$ e dunque $\mathcal{F}^\star$ è un filtro.

Mostro ($\Rightarrow$). Suppongo che $\mathcal{F}$ non sia P.R. Dunque esistono $n$ insiemi appartenenti alla famiglia tali che $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$ ma $A_i \notin \mathcal{F}$ per ogni $i$. Ciò significa, però, che $A_i^c \in \mathcal{F}^\star$ per ogni $i$. Dunque, essendo $\mathcal{F}^\star$ un filtro, $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \in \mathcal{F}^\star$, ovvero per la stessa definizione di $\mathcal{F}^\star$, passando al complementare, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \notin \mathcal{F}$ che è assurdo.

**Esercizio 2:** *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia (con le convenzioni viste sopra). Mostrare che $\mathcal{F}^\star$ ha la F.I.P. se e solo se $\mathcal{F}$ è W.P.R.*

*Dimostrazione:* Mostro ($\Leftarrow$). Suppongo che $\mathcal{F}^\star$ non abbia la F.I.P. Dunque esistono in $\mathcal{F}^\star$ $n$ sottoinsiemi tali che $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$. Ciò significa che $A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c = \mathbb{N}$ e vista la W.P.R. e la chiusura per soprainsieme, esiste un certo $i$ per cui $A_i^c \in \mathcal{F}$. Ma ciò è assurdo poiché $A_i^c \notin \mathcal{F}$ visto che $A_i \in \mathcal{F}^\star$.

Mostro ($\Rightarrow$). Voglio mostrare che $\mathcal{F}$ è W.P.R. Sia allora $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \mathbb{N}$ un unione degli elementi della famiglia e suppongo per assurdo che nessuno di essi appartenga a $\mathcal{F}$. Allora $A_i^c \in \mathcal{F}^\star$ e per la F.I.P. $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \neq \emptyset$. Dunque passando al complementare $A_1 \cup \cdots \cup A_n \neq \mathbb{N}$ che è in contraddizione con l'ipotesi.

In conclusione si può notare che $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\star$ se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro. Dunque si possono formulare anche le seguenti:

**Esercizio 3:** *$\mathcal{F}^\star$ ha la F.I.P. se e solo se esiste $\mathcal{U}$ ultrafiltro tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Inoltre $\mathcal{F}^\star$ è un filtro se e solo se $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{U} | \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}\}$.*

*Dimostrazione:* E' chiaro, per le proprietà inziali degli ultrafiltri, che una famiglia ha la F.I.P. se e solo se esiste un ultrafiltro che la estende. Dunque $\mathcal{F}^\star$ ha la F.I.P. se e solo se esiste $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tale che $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}^\star$. Passando ai duali, usando l'**Osservazione 1** (Punto (2) e (3)) ciò avviene se e solo se esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, appunto ciò che si voleva.

L'ultima equivalenza si ottiene notando che, se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri contenuti in $\mathcal{F}$, allora passando ai duali, $\mathcal{F}^\star$ è intersezione di ultrafiltri che contengono $\mathcal{F}^\star$. Ma in generale, intersezione di ultrafiltri è sempre un filtro, dunque $\mathcal{F}^\star$ è un filtro. Viceversa, se $\mathcal{F}^\star$ è un filtro, allora è esattamente l'intersezione di tutti gli ultrafiltri che lo estendono (infatti è semplice, fissato un sottoinsieme $A$ non appartenente a un dato filtro, mostrare con Zorn l'esistenza di ultrafiltro che estende il filtro ma non possiede $A$ fra i suoi elementi). Dunque $\mathcal{F}^\star = \bigcap\{\mathcal{U} | \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}^\star\}$. A questo punto passando ai duali e sfruttando l'**Osservazione 1**, si ha $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{U} | \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}\}$, come volevo.