# Esercizi lezione 13/4/15, Andrea Vaccaro

6 maggio 2015

**Proposizione 0.1.** *$A$ è $\leq_{fe}$ massimale se e solo se è spesso.*

*Dimostrazione.* Sia $A$ spesso, mostriamo che per ogni $H \subseteq \mathbb{N}$ si ha che $H \leq_{fe} A$. Sia $F \subseteq H$ finito, siano $m$ ed $M$ il suo massimo e minimo; poiché $A$ è spesso, esiste un intervallo $[a, b]$ lungo $M - m + 1$ contenuto in $A$ che cominci dopo $M$. sia $x = a - m$; vale allora che $F + x \subseteq [a, b] \subseteq A$, dunque vale $H \leq_{fe} A$.

Se $A$ è $\leq_{fe}$ massimale, allora per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$, vale $B \leq_{fe} A$. Sia $B$ uno spesso: vale allora che per ogni $n$ esiste un intervallo in $B$ lungo almeno $n$, e lo chiameremo $I_n$. Per ipotesi esiste $x$ tale che $I_n + x \subseteq A$, il che significa che per ogni $n$, $A$ contiene un intervallo lungo $n$, perciò $A$ è spesso. $\square$

**Proposizione 0.2.** *Se $A$ è AP-rich e $A \leq_{fe} B$ allora anche $B$ è AP-rich.*

*Dimostrazione.* Facciamo vedere che per ogni $n$ si ha che $B$ contiene progressioni aritmetiche lunghe $n$. Questo fatto è certamente valido per $A$, sia allora $F_n = \{a + ib\}_{i \leq n}$; poiché esiste $x$ tale che $F_n + x \subseteq B$, si ha che $\{a + x + ib\}_{i \leq n}$ è un pezzo di una progressione aritmetica lungo $n$ contenuto in $B$, e dunque segue la tesi. $\square$

**Proposizione 0.3.** *Se $A \leq_{fe} B$ allora $BD(A) \leq BD(B)$.*

*Dimostrazione.* Sia $a_n = \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A\cap[x+1,x+n]|}{n}$ e analogamente $b_n$. Se mostriamo che $a_n \leq b_n$, la tesi segue. Sia $\overline{x}$, il valore per cui $a_n = \frac{|A\cap[\overline{x}+1,\overline{x}+n]|}{n}$; esiste per ipotesi $y$ tale per cui $A \cap [\overline{x}+1, \overline{x}+n] + y \subseteq B$. Da questo si deduce che $|A \cap [\overline{x}+1, \overline{x}+n]| = |A \cap [\overline{x}+1, \overline{x}+n] + y| \leq |B \cap [\overline{x}+y+1, \overline{x}+y+n]|$ che implica $a_n \leq b_n$. $\square$

**Proposizione 0.4.** $A \leq_{fe} B \not\Rightarrow \overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$.

*Dimostrazione.* Per mostrare ciò basta considerare $A$ un qualunque insieme con densità positiva (ad esempio i pari), e $B$ un qualunque spesso con densità superiore nulla (come quello costruito nella proposizione 0.4 degli esercizi del 23/3). Per il primo esercizio vale che $A \leq_{fe} B$, ma non vale $\overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$. $\square$

**Proposizione 0.5.** *Se $A$ è sindetico a tratti e $A \leq_{fe} B$, allora $B$ è sindetico a tratti.*

*Dimostrazione.* Dire che $A$ è sindetico a tratti equivale a dire che esiste $k$ tale che per ogni $n$ esiste un intervallo $I_n$ lungo $n$ su cui $A$ abbia buchi lunghi al massimo $k$. Sappiamo anche che per ogni $n$ esiste un $x_n$ tale per cui $(A \cap I_n) + x_n \subseteq B$; questo basta per dire che $B$ è sindetico a tratti: infatti per ogni $n$ l'intersezione $B \cap (I_n + x_n)$ contiene $(A \cap I_n) + x_n$, che ha buchi lunghi al più $k$ nell'intervallo $I_n + x$. $\square$

**Proposizione 0.6.** *Non è vero che $A$ sindetico e $A \leq_{fe} B$ implica $B$ sindetico.*

*Dimostrazione.* Sfruttiamo sempre il fatto che se $B$ è spesso allora è $\leq_{fe}$ massimale. Poiché esistono spessi non sindetici (basti pensare a $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ dove $B_i = [m_i, M_i]$ è un intervallo lungo $i$ e si ponga sempre $m_{i+1} > M_i$ con $m_{i+1} - M_i = i$) segue la tesi. □

**Proposizione 0.7.** *$B$ è sindetico a tratti se e solo se esiste $A$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$*

*Dimostrazione.* Se esiste $A$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$, è sufficiente considerare per ogni $n$ l'intervallo $I_n = [1, n]$; per ipotesi esiste allora $x_n$ tale che $(A \cap I_n) + x_n \subseteq B$. Segue che per ogni $n$, $B$ avrà buchi lunghi al più $k$ ($k$ testimone della sindeticità di $A$) nell'intervallo $I_n + x_n$ di lunghezza $n$. Pertanto $B$ è sindetico a tratti.

Vediamo ora il viceversa[1]. Sia $B$ sindetico a tratti, ciò significa che esiste un $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n$ un intervallo $I_n$ lungo $n$ tale che $B \cap I_n$ abbia sempre buchi lunghi al più $k$ in $I_n$. Costruiremo un sindetico $A$ per passi. Definiamo la seguente notazione: $[a, b]_n$ indica il sottoinsieme di $I_n$ che va dall'$a$-esimo al $b$-esimo elemento di $I_n$: se $I_n$ fosse troppo corto, $[a, b]_n$ indicherà per convenzione l'insieme vuoto, altrimenti posto $I_n = [m_n, M_n]$ allora $[a, b]_n = [a + m_n - 1, b + m_n - 1]$ (il $-1$ c'è perché stiamo pensando $\mathbb{N}$ senza lo zero, e vogliamo che $[1, k]_n$ coincida coi primi $k$ elementi di $I_n$). Consideriamo l'intervallo $[1, k]$, e ne considero tutti i sottoinsiemi escluso quello vuoto, per un totale di $2^k - 1$ elementi. Se pensiamo a $B \cap [1, k]_n$, allora per infiniti $n$ si ritroverà sempre un traslato dello stesso sottoinsieme di $[1, k]$; chiamiamo $A_1$ tale sottoinsieme di $[1, k]$ e chiamiamo $H_1$ l'insieme di tutti gli $I_n$ tali per cui $B \cap [1, k]_n$ sia un traslato di $A_1$. Come detto, $H_1$ è infinito, da un lato perché gli $I_n$ sono infiniti e $2^k - 1$ è finito, dall'altro perché $B$ è sindetico a tratti: ricordiamo infatti che $A_1$ è non vuoto, quindi se $B$ non fosse sindetico a tratti la costruzione potrebbe fallire. A questo punto rifacciamo il medesimo discorso su $[k + 1, 2k]$: esiste un sottoinsieme non vuoto $A_2$ su tale intervallo tale che vi siano infiniti intervalli in $H_1$ (i quali costituiranno un nuovo insieme infinito $H_2$) per cui $B \cap [k + 1, 2k]_n$ sia un traslato di $A_2$ (di nuovo sfruttando l'ipotesi che $B$ è sindetico a tratti). Procedendo in modo induttivo definiamo $A_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ ($A_j$ sarà quel sottoinsieme non vuoto di $[(j-1)k+1, jk]$ tale per cui esistano infiniti intervalli $I_n$ in $H_{j-1}$ per cui $B \cap [(j - 1)k + 1, jk]_n$ sia un traslato di $A_j$; questi infiniti intervalli definiranno $H_j$ e come sempre l'ipotesi che $B$ è sindetico ci permette di procedere anche se $A_j$ è non vuoto). Definiamo allora $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Esso è sindetico, infatti in ogni intervallo della forma $[jk + 1, (j + 1)k]$ c'è almeno un elemento, quindi avrà buchi lunghi al più $2k - 1$. Sia ora $F$ finito contenuto in $A$; per costruzione $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} A_n$, perciò un traslato di $F$ sarà contenuto in ogni $B \cap J$ con $J \in H_N$, e quindi effettivamente $A \leq_{fe} B$. $\square$

[1]Esercizio svolto insieme a I. Panaccione e G. Basso.