Esercizi sulle proprietà logiche e algebriche del modello di ultrapotenza

Guglielmo Nocera

3 maggio 2015

Definizione 1. *F campo ordinato. $\gamma \in F$ è detto* infinitesimo *se $-\frac{1}{n} < \gamma < \frac{1}{n}$ per ogni n nei naturali del campo.*

Esercizio 1. *F campo ordinato. Sono equivalenti:*

(1) *F archimedeo (ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n t.c. $\varepsilon + \ldots (n \text{ volte}) \cdots + \varepsilon > 1$)*

(2) *$\mathbb{N}$ illimitato in F*

(3) *$\mathbb{Q}$ denso in F*

(4) *non esistono numeri infinitesimi diversi da 0.*

<u>*Dim.*</u>

(1) $\Longleftrightarrow$ (4) Banalmente, un infinitesimo $\gamma \neq 0$, a meno di cambiare segno, sarebbe tale che $0 < \gamma < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi per ogni n $n\gamma < 1$, assurdo. Del resto l'implicazione mostrata, poiché $n = 0$ non potrà mai soddisfare la condizione di archimedeicità (quindi si può invertire n nell'asserzione) si inverte facilmente, da cui l'equivalenza.

(4)$\Longrightarrow$(3) Supponiamo che esista $r \in F$, U intorno (nel senso dell'ordine) di r che non contiene razionali. Sia s l'ampiezza di tale intervalli e siano $n < r < N$ due naturali (esistono perché per i punti precedenti i naturali sono illimitati). Allora o il procedimento di bisezione fra n e N di centro r termina (assurdo perché se terminasse avremmo $q < r < Q$ senza altri razionali nell'intervallo fra i razionali q e Q; ma per illimitatezza esiste m naturale t.c. $q < q + \frac{1}{m} < Q$), oppure non termina, definendo una successione di intervalli (q_k, Q_k) che possiamo supporre di ampiezza minore di $\frac{1}{k}$. Se tali intervalli contenessero tutti interamente l'intorno U, s sarebbe un infinitesimo, in quanto $0 < s < \frac{1}{k}$ per ogni k: assurdo.

(3)$\Longrightarrow$(2) Sia per assurdo $M \in F$ maggiorante per $\mathbb{N}$. Allora l'intervallo $(0, \frac{1}{M}]$ non conterrebbe unità frazionarie, e dunque, poiché ogni razionale positivo è maggiore o uguale dell'unità frazionaria associata al proprio denominatore, tale intervallo non conterrebbe razionali. Ma poiché l'ampiezza di tale intervallo è non nulla (dato che come conseguenza degli assiomi di campo 0 non è invertibile), ciò è assurdo.

(2)$\Longrightarrow$(4) Un infinitesimo γ non nullo sarebbe invertibile, e dunque il suo inverso (a meno di cambiare segno) limiterebbe $\mathbb{N}$ dall'alto, assurdo. $\square$

Definizione 2. *Costruito* ${}^*\mathbb{Q}$ *come* $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\big/_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$ *non principale, si dice* ${}^*\mathbb{Q}_{fin} = \{\xi \in {}^*\mathbb{Q} | \xi$ *è classe di equivalenza di una successione limitata*$\}$.

Esercizio 2.

1) ${}^*\mathbb{Q}$ *è un campo ordinato non archimedeo.*

2) ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$ *è ancora un anello ma non un campo.*

3) Gli infinitesimi in ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$ *formano un ideale* I *massimale.*

4) ${}^*\mathbb{Q}_{fin}\big/_{I} \cong \mathbb{R}$ *perché campo ordinato e completo.*

<u>*Dim.*</u>

(1) Le proprietà di campo e l'ordine discendono dal modello di ultrapotenza come nel caso degli iperreali. La successione $(n|n \in \mathbb{N})$ è definitivamente maggiore di ogni costante, quindi la sua classe di equivalenza secondo un ultrafiltro non principale limita i naturali di ${}^*\mathbb{Q}$: quindi ${}^*\mathbb{Q}$ nonè archimedeo.

(2) ${}^*\mathbb{Q}_fin$ è evidentemente un anello, ma non è un campo perché ad esempio la successione $q_n = (\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N})$ non ha inverso limitato modulo $\mathcal{U}$, dato che se la successione degli inversi (p_n) fosse limitata quasi ovunque (cioè in un insieme di indici $A \in \mathcal{U}$) da un razionale M, avremmo $p_n q_n < 1$ per ogni $n \in A, n > N$ (quest'ultimo insieme di indici sta ancora nell'ultrafiltro perché $\mathcal{U}$ deve estendere Fréchet), quindi $[p][q] \neq 1_{{}^*\mathbb{Q}}$

(3) Gli infinitesimi sono un ideale in ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$. Infatti se $\forall q \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ esiste $A_n(q) \in \mathcal{U}$ t.c.

$$q_k < \frac{1}{N} \ \forall k \in A_n(q)$$

e se

$$p_n < N \ \forall n \in \mathbb{N}$$

per un certo N, allora pq è un infinitesimo, dato che

$$\forall n \in N \ \exists \ A_n(pq) = A_{nN}(q) \in \mathcal{U}$$

tale che

$$q_k < \frac{N}{nN} = \frac{1}{n} \qquad \forall k \in A_n(pq).$$

(Le verifiche sulla somma sono immediate). L'ideale I è massimale perché se $p \in {}^*\mathbb{Q}_{fin} \setminus I$ allora $p_n \neq 0$ quasi ovunque (altrimenti sarebbe nulla quasi ovunque), cioè per un insieme di indici $A \in \mathcal{U}$. Per ogni $n \in A$ considero dunque $q_n = \frac{1}{n}$ (mi basta definirla quasi ovunque). Allora q_n è limitata perché p non è un infinitesimo, quindi $1 \in < I, p >$

(4) L'ordine è ereditato da ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$: $[p] \leq [q] \iff \{p_n - q_n \leq 0$ a meno di infinitesimi$\} \in \mathcal{U}$. Dimostriamo che è completo. Supponiamo di avere una successione $([q]_k) \subset {}^*\mathbb{Q}_{fin}\big/_I$ e che $\forall \varepsilon\ \exists K \in \mathbb{N}$ t.c. $[q]_k - [q]_l < \varepsilon\ \forall k, l \geq K$. Allora la successione di successioni razionali associata a $([q]_k)$ a meno di infinitesimi, vale a dire $(q_n)_k$, è tale che $\forall n$ esiste

$$\lim_{k \to \infty} (q_n)_k = r_n \in \mathbb{R},$$

cioè si può costruire una $n-$successione reale fatta da tutti i $k-$limiti delle componenti q_n. Per ogni n esiste allora k tale che $(q_n)_k$ è vicino a r_n, in particolare

$$|r_n - (q_n)_k| < \frac{1}{n}.$$

Sia dunque $\bar{q}_n$ la successione razionale costituita dai $(q_n)_k$ appena definiti. Allora poiché $\forall \varepsilon$ esiste k t.c.

$$|r_n - (q_n)_k| < \varepsilon$$

per convergenza, mettendo assieme le due disuguaglianze si ha che

$$|\bar{q}_n - (q_n)_k| = |\bar{q}_n - r_n + r_n - (q_n)_k| < \varepsilon + \frac{1}{n}$$

ovvero, poiché la successione $(\frac{1}{n})$ è un infinitesimo di ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$,

$$|[\bar{q}] - [q]_k| <_I \varepsilon$$

come elementi di ${}^*\mathbb{Q}_{fin}\big/_I$. Quindi il limite esiste ed è $[\bar{q}]$.

Esercizio 3. ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big/_{\mathcal{U}}$ *ha la cardinalità del continuo.*

Dim. Dimostriamo equivalentemente, ponendo in bigezione le classi di ${}^*\mathbb{N}$ e ${}^*\mathbb{Q}$, che ${}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\big/_{\mathcal{U}}$ ha la cardinalità del continuo. Poiché $|{}^*\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = c$, ci basta dimostrare che ${}^*\mathbb{Q}$ ha almeno la cardinalità del continuo. Ma abbiamo dimostrato sopra che ${}^*\mathbb{Q}_{fin}\big/_I \cong \mathbb{R}$, e quindi ${}^*\mathbb{Q}$ ha almeno tanti elementi quanti sono i numeri reali. $\square$

Esercizio 4. *L'operatore * preserva intersezione, unione, differenza.*

Dim.

- ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$:

$$x = [x_n] \in {}^*(A \cap B) \iff \{n | x_n \in A \cap B\} \in \mathcal{U}$$

$$\iff \{n|x_n \in A\} \cap \{n|x_n \in B\} \in \mathcal{U} \iff \{n|x_n \in A\} \in \mathcal{U} \wedge \{n|x_n \in B\} \in \mathcal{U} \iff x \in {}^*A \cap {}^*B$$

- ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$:

$$x \in {}^*(A \cup B) \iff \{n|x_n \in A \cup B\} \in \mathcal{U}$$

$$\iff \{n|x \in A\} \cup \{n|x_n \in B\} \in \mathcal{U} \iff \{n|x_n \in A\} \in \mathcal{U} \vee \{n|x_n \in B\} \in \mathcal{U} \iff x \in {}^*A \cup {}^*B$$

- ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$:

$$x \in {}^*(A \setminus B) \iff \{n|x_n \in A \setminus B\} \in \mathcal{U}$$

$$\iff \{n|x_n \in A\} \setminus \{n|x_n \in B\} \in \mathcal{U} \iff \{n|x_n \in A\} \in \mathcal{U} \wedge \{n|x_n \in B\} \notin \mathcal{U} \iff x \in {}^*A \setminus {}^*B$$

□

Esercizio 5. *La classe degli insieme interni nel modello di ultrapotenza è chiusa per intersezione, unione e differenza.*

Dim. Mostriamo solo l'intersezione, essendo le altre proprietà, come nella dimostrazione appena precedente, perfettamente analoghe. Se A, B sono interni, ovvero $A = [A_n], B = [B_n]$, $A_n, B_n \subset \mathbb{N}$, vale

$$x = [x_n] \in (A \cap B) \iff \{n|x_n \in A_n \cap B_n\} \in \mathcal{U}$$

$$\iff \{n|x_n \in A_n\} \cap \{n|x_n \in B_n\} \in \mathcal{U} \iff \{n|x_n \in A_n\} \in \mathcal{U} \wedge \{n|x_n \in B_n\} \in \mathcal{U} \iff x \in A \cap B$$

□

Esercizio 6. *Dato $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, l'insieme $\mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{N} | \nu \in {}^*A\}$ è un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$.*

Dim. Per i risultati dell'*Esercizio 4* abbiamo le proprietà di filtro. Se inoltre $A \notin \mathcal{U}$, allora detto $\nu = [x_n]$ vale $\{n|x_n \in A\} \notin \mathcal{U}$, ovvero $\{n|x_n \in A^c\} \in \mathcal{U}$, ovvero $A^c \in \mathcal{U}$. Infine $\mathcal{U}$ è non principale, dato che se contenesse un insieme finito A avremmo $\{n|x_n \in A\} \in \mathcal{U}$, ma allora x_n è limitato quasi ovunque da $\max A$, assurdo perché ν è infinito. □

Esercizio 7. $A \subset {}^*\mathbb{N}$ *iperinfinito* $\iff \exists \sigma : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow A$ *bigezione*

Dim.

$\Longleftarrow$ Supponiamo per assurdo A finito o iperfinito: ha massimo ed è dunque incluso in un intervallo $[1, \nu], \nu = \max A$. Ma se $\nu = \langle a_n \rangle$ vale

$$[1, \nu] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1, a_n]$$

dove si è identificato ogni a_n con l'ipernaturale finito corrispondente. Quindi $[1, \nu]$ è numerabile come insieme (nel senso della cardinalità esterna), e ciò è assurdo perché ${}^*\mathbb{N}$ non lo è.

$\Longrightarrow$ Sia $A = \langle A_n | n \in \mathbb{N} \rangle$. Per ogni $n \in U = \{n \in \mathbb{N} || A_n| = +\infty\}$ sia f_n una bigezione con $\mathbb{N}$ (che esiste sempre per le proprietà di $\mathbb{N}$) mentre per $n \notin U f_n := a$ per un qualunque $a \in A_n$. Sia ora α in $A, \alpha = \langle a_n \rangle$, dove $a_n \in A_n \forall n$, e sia, per ogni $n \in U, x_n = f_n^{-1}(a_n)$. Ponendo $\sigma^{-1}(\alpha) = \langle x_n \rangle \in {}^*\mathbb{N}$ si ottiene la bigezione cercata.

$\square$