Esercizi lezione 31/3/15, Andrea Vaccaro

3 maggio 2015

Proposizione 0.1. *Per ogni U ultrafiltro non principale, la mappa*

$$\begin{aligned}\theta_U : \beta\mathbb{N} &\to \beta\mathbb{N}\\ V &\mapsto U \oplus V\end{aligned}$$

non è continua.

Dimostrazione. Sfruttiamo il fatto che il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è costituito dagli ultrafiltri principali. Se U è non principale, allora esiste V tale che $U \oplus V \neq V \oplus U$; poiché $St(\mathbb{N})$ è di Hausdorff, posso trovare due aperti A e B tali per cui $U \oplus V \in A$, $V \oplus U \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo θ_U continua, si ha allora che $\theta_U^{-1}(A)$ è un intorno aperto di V, come anche $\psi_U^{-1}(B)$. Posso allora trovare un ultrafiltro principale W in $\theta_U^{-1}(A) \cap \psi_U^{-1}(B)$, infatti tale insieme è un intorno aperto di V, perciò esiste $\mathcal{O}_A$ aperto di base contenuto nell'intersezione a cui V appartiene, basta allora considerare $W = \{X \subseteq \mathbb{N} : n \in X\}$ con $n \in A$. A questo punto però si ottiene che $\theta_U(W) = U \oplus W = W \oplus U = \psi_U(W)$; ma poiché il primo appartiene ad A, e il secondo a B, si ottiene un assurdo. $\square$

Proposizione 0.2. *Verificare le seguenti proprietà:*

i) Se U è idempotente allora $k\mathbb{N} \in U$ per ogni k.

ii) Esiste W tale che $W \oplus U = U$ se e solo se per ogni $A \in U$ esiste n tale che $A - n \in U$.

iii) U è idempotente se e solo se per ogni $A \in U$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in U$.

iv) $U_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} : \alpha \in {}^*A\}$ è idempotente se e solo se quando $\alpha \in {}^*A$, allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.

v) Il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è l'insieme degli ultrafiltri principali.

Dimostrazione. i).

Supponiamo esista k tale che $k\mathbb{N}^c \in U$ idempotente. Si verifica che $k\mathbb{N}^c = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_{k-1}$ dove $K_i = \{n : n \equiv i \bmod k\}$; poiché U è ultrafiltro, esiste $1 \leq i < k$ tale che $K_i \in U$. Poiché U è idempotente, ciò significa che $B_i = \{n : K_i - n \in U\} \in U$, perciò $K_i \cap B_i \in U$, dunque è non vuoto. Si verifica che $K_i - x = \{n : n + x \in K_i\} = \{n : n \equiv i - x \bmod k\}$; dunque se $x \in K_i$, poiché $K_i - x \subseteq k\mathbb{N}$, e quindi non può stare in U, non è possibile che $K_i \cap B_i \neq \emptyset$.

ii).

$\Rightarrow$. Vale che $A \in U$ se e solo se $A \in W \oplus U$ che equivale a $\{n : A - n \in U\} \in W$, che quindi deve essere non vuoto, perciò esiste n tale che $A - n \in U$.

$\Leftarrow$. Definisco $B_A = \{n : A - n \in U\}$. Per ipotesi, se $A \in U$, allora $B_A \neq \emptyset$. Si verifica anche che $B_A \cap B_C = \{n : A - n \in U \wedge C - n \in U\} = \{n : A - n \cap C - n \in U\}$; vale che $A - n \cap C - n = A \cap C - n$: se $j + n \in A$ e $j + n \in C$, allora $j + n \in A \cap C$; se $j + n \in A \cap C$, allora $j + n$ è sia in A che in C. Si ottiene dunque $B_A \cap B_C = B_{A \cap C}$; vale quindi che per $A \in U$, i B_A godono della proprietà dell'intersezione finita, sia allora W ultrafiltro che estende tale famiglia di insiemi. Se $A \in U$, allora $B_A \in W$ e quindi $A \in W \oplus U$. Se $A \notin U$, allora $B_{A^c} \in W$ e se valesse $B_A \in W$, poiché $B_A \cap B_{A^c} = B_\emptyset = \emptyset$, si avrebbe un assurdo.

iii).

$\Rightarrow$. Se $U = U \oplus U$ allora $A \in U$ se e solo se $B = \{n : A - n \in U\} \in U$, quindi $A \cap B \neq \emptyset$; se prendo allora $n \in A \cap B$, ho ciò che cerco.

$\Leftarrow$. Per il punto precedente esiste W tale che $W \oplus U = U$; l'ipotesi però garantisce anche che $B_A \cap A \neq \emptyset$ (notazione del punto precedente) per ogni $A \in U$. Sia dunque $A, C \in U$, si ottiene che $B_C \cap A \supseteq B_{A \cap C} \cap (A \cap C) \neq \emptyset$; visto che quindi $\{B_A\}_{A \in U} \cup U$ gode della proprietà dell'intersezione finita, posso considerare W ultrafiltro che estende tale famiglia (anziché solo $\{B_A\}_{A \in U}$), e per massimalità di U si deve avere che $U = W$.

iv).

Sfruttando l'esercizio precedente si ha che U_α è idempotente se e solo se per ogni A tale che $\alpha \in {}^*A$ esiste $a \in A$ tale che $\alpha \in {}^*(A - a)$ che equivale a dire $\alpha + a \in {}^*A$.

□