Esercizi del Corso “Ultrafiltri e Metodi Non Standard”

Federico Glaudo

3 maggio 2015

1 Fatti equivalenti a contenere insiemi di somme

Lemma 1.1. *Siano $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ due ultrafiltri, se $X \in \mathcal{U}$, $Y \in \mathcal{V}$ e $X+Y \subseteq A$ allora $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Se $x \in X$ allora è ovvio che $Y \subseteq A - x$ e perciò di certo $A - x \in \mathcal{V}$. Di conseguenza vale

$$X \subseteq \{n : A - n \in \mathcal{V}\} \implies \{n : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \implies A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}\,.$$

□

Proposizione 1.2. *Fissato un sottoinsieme A dei naturali, sono fatti equivalenti:*

- *Esiste un insieme infinito $X \subseteq \mathbb{N}$ tale che $X + X$[1] $\subseteq A$.*
- *Esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale tale che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. In virtù del Lemma 1.1, è chiaro che, se $X + X \subseteq A$ e $X \in \mathcal{U}$, di certo $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$. Essendo X infinito, esiste di certo un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale che lo contiene e perciò è dimostrata una delle due implicazioni.

Ora assumiamo $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ e definiamo $\hat{A} = \{n : A - n \in \mathcal{U}\}$, notando che l'ipotesi ci assicura $\hat{A} \in \mathcal{U}$.

Mostriamo di saper costruire una successione crescente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che rispetti le seguenti proprietà:

- Per ogni $i < j$ vale $x_i + x_j \in A$.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $A - x_n \in \mathcal{U}$.

Scegliamo arbitrariamente x_1 in $\hat{A}$. È chiaro che sono rispettate entrambe le richieste per x_1.

Assumiamo ora di aver trovato una sequenza $x_1 < \cdots < x_n$ che rispetta le richieste e costruiamo x_{n+1}. Imponiamo in particolare che $x_n < x_{n+1}$ e che x_{n+1} appartenga all'intersezione

$$\hat{A} \cap (A - x_1) \cap (A - x_2) \cap \cdots \cap (A - x_n)\,.$$

È possibile imporre tali richieste visto che ogni membro dell'intersezione appartiene ad $\mathcal{U}$ per ipotesi, di conseguenza l'intersezione è infinita e contiene almeno un elemento maggiore di x_n. Rimane solo da verificare che x_{n+1} rispetti tutte le richieste. Di certo $A - x_{n+1} \in \mathcal{U}$, visto che $x_{n+1} \in \hat{A}$. Inoltre, per ogni $1 \le i \le n$, vale $x_{n+1} \in A - x_i$ e di conseguenza $x_i + x_{n+1} \in A$ come sperato.

È chiaro che l'insieme $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ è infinito e rispetta $X + X \subseteq A$. □

[1] In questo contesto con $X + X$ si intende $\{x + x' : x \neq x' \wedge x, x' \in X\}$.

Proposizione 1.3. *Fissato un sottoinsieme A dei naturali, sono fatti equivalenti:*

- *Esistono due insiemi infiniti $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ tali che $X + Y \subseteq A$.*
- *Esistono due ultrafiltri $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ non principali tali che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \cap \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca a grandi linee il ragionamento usato per mostrare la Proposizione 1.2.

Se $X+Y \subseteq A$, scegliamo arbitrariamente $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultrafiltri non principali tali che $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathcal{V}$. Applicando il Lemma 1.1 e notando che $X + Y = Y + X$ è ovvio dedurre che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \cap \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Viceversa, assumiamo $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \cap \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ e definiamo

$$A_{\mathcal{U}} = \{n : A - n \in \mathcal{U}\},$$
$$A_{\mathcal{V}} = \{n : A - n \in \mathcal{V}\},$$

notando che per ipotesi $A_{\mathcal{U}} \in \mathcal{V}$ e $A_{\mathcal{V}} \in \mathcal{U}$.

Mostriamo di saper costruire due successioni crescenti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che rispettino le seguenti proprietà:

- Per ogni i, j vale $x_i + y_j \in A$.
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $A - x_n \in \mathcal{U}$ e $A - y_n \in \mathcal{V}$.

Scegliamo arbitrariamente x_1 in $A_{\mathcal{U}}$ e y_1 in $A_{\mathcal{V}} \cap (A - x_1)$. Possiamo fare tale scelta visto che $A - x_1 \in \mathcal{U}$ e anche $A_{\mathcal{V}} \in \mathcal{U}$. È chiaro che questa scelta di x_1, y_1 rispetta tutte le richieste.

Assumiamo ora di aver trovato due sequenze $x_1 < \cdots < x_n$ e $y_1 < \cdots < y_n$ che rispettano tutte le richieste e costruiamo x_{n+1} e y_{n+1}. Imponiamo in particolare che $x_n < x_{n+1}$ e $y_n < y_{n+1}$ e che siano rispettate le seguenti appartenze:

$$x_{n+1} \in A_{\mathcal{U}} \cap \bigcap_{i=1}^{n} (A - y_i),$$
$$y_{n+1} \in A_{\mathcal{V}} \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} (A - x_i).$$

Innanzitutto notiamo che la richiesta su y_{n+1} dipende dalla scelta di x_{n+1} e quindi verifichiamo prima che si possa scegliere x_{n+1} come cercato. Ciò però è ovvio, visto che l'intersezione a cui x_{n+1} deve appartenere è formata da membri di $\mathcal{V}$ ed è perciò infinita, quindi contiene almeno un elemento maggiore di x_n. Analogamente si può vedere che anche le imposizioni su y_{n+1} sono soddisfacibili.

A questo punto resta da verificare che x_{n+1} e y_{n+1} rispettino tutte le richieste. Di certo $A - x_{n+1} \in \mathcal{U}$, visto che $x_{n+1} \in A_{\mathcal{U}}$, e per analogo motivo vale anche $A - y_{n+1} \in \mathcal{V}$. Inoltre, per ogni $1 \leq i \leq n$, $x_{n+1} \in A - y_i$ e perciò $x_{n+1} + y_i \in A$. Analogamente vale che per ogni $1 \leq i \leq n+1$ sia ha $x_i + y_{n+1} \in A$ e ciò termina le verifiche da effettuare.

Abbiamo concluso visto che è ovvio che gli insiemi $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ sono infiniti e rispettano $X + Y \subseteq A$. □