

# Esercizi su densità asintotiche, spessità, sindeticità (prima parte)

Guglielmo Nocera

3 maggio 2015

**Definizione 1.** Data una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{N}$ , si definisce  $\mathcal{F}^*$  come la famiglia di sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$  che intersecano tutti gli elementi di  $\mathcal{F}$ .

**Esercizio 1.** Se la famiglia  $\mathcal{F}$  (di sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{N}$ ) è regolare per partizioni allora  $\mathcal{F}^*$  è un filtro.

Dim.

- Evidentemente  $\emptyset \notin \mathcal{F}^*$ .
- $A \subseteq B, A \in \mathcal{F}^*$  implica che  $A$  interseca tutti gli elementi di  $\mathcal{F}$ , e quindi anche  $B$ , dunque  $B \in \mathcal{F}^*$ .
- Per dimostrare la stabilità di  $\mathcal{F}^*$  per intersezioni binarie utilizziamo la regolarità per partizioni di  $\mathcal{F}$ . Supponiamo infatti che  $A, B \in \mathcal{F}^*, A \cap B \notin \mathcal{F}^*$ . Dunque  $\exists F \in \mathcal{F}$  t.c.

$$A' = F \cap A \neq \emptyset$$

$$B' = F \cap B \neq \emptyset$$

$$A' \cap B' = F \cap A \cap B = \emptyset.$$

Tuttavia

$$F = A' \cup B' \cup (F \setminus (A' \cup B'))$$

e quindi per PR almeno uno fra  $A', B'$  e  $A \cap B$  appartiene a  $\mathcal{F}$ . Ma se  $A' \in \mathcal{F}$ , poiché  $B \cap A' = B' \cap A' = \emptyset$  si ottiene che  $B \notin \mathcal{F}^*$ , assurdo. Analogo ragionamento vale se  $B' \in \mathcal{F}$ ; se infine  $\emptyset = A' \cap B' \in \mathcal{F}$  si contraddice la definizione.

□

**Corollario 1.** La famiglia  $\Delta^*$  con

$$\Delta = \{\Delta(X) | X \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito}\}$$

(insiemi di distanze) è un filtro.

**Definizione 2** (Densità asintotiche).  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Si definiscono densità asintotica superiore, inferiore e di Banach rispettivamente:

$$\begin{aligned}\bar{d}(A) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \\ \underline{d}(A) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \\ \underline{d}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \quad (\text{se esiste}) \\ BD(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}\end{aligned}$$

La densità di Banach è ben definita perché ogni  $\frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$  è limitato da 1 (dunque esiste il massimo) e la successione dei massimi è subadditiva (dunque esiste il limite: Lemma di Fekete).

**Definizione 3.** Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{N}$  si dice spesso se contiene intervalli arbitrariamente lunghi, e sindetico se i suoi buchi sono uniformemente limitati da un naturale  $k$ . Si dice sindetico a tratti se è intersezione di un sindetico e di uno spesso (ovvero se esistono intervalli arbitrariamente lunghi in cui esso ha buchi limitati da una costante uguale per tutti questi intervalli).

**Esercizio 2.**  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  disgiunti.

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \bar{d}(B) \leq \bar{d}(A \cup B) \leq \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$$

*Dim.* Siano  $a_n = \frac{|A \cap [1, n]|}{n}$ ,  $b_n = \frac{|B \cap [1, n]|}{n}$ ,  $c_n = \frac{|(A \cup B) \cap [1, n]|}{n} = a_n + b_n$  essendo  $A$  e  $B$  disgiunti. Ricordando la superadditività del liminf e la subadditività del limsup,

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) = \liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) = \liminf (c_n) = \underline{d}(A \cup B)$$

$$\underline{d}(A \cup B) - \bar{d}(B) = \liminf (a_n + b_n) - \limsup (b_n) = \liminf (a_n + b_n) + \liminf (-b_n) \leq \liminf (a_n + b_n - b_n) = \underline{d}(A)$$

$$\bar{d}(A \cup B) - \underline{d}(A) = \limsup (a_n + b_n) + \limsup (-a_n) \geq \limsup (b_n) = \bar{d}(B)$$

$$\bar{d}(A \cup B) \leq \limsup (a_n) + \limsup (b_n) = \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$$

□

**Esercizio 3.** Se  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$  è t.c.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$  allora  $d(A) = 0$ .

*Dim.* Supponiamo  $\bar{d}(A) > 0$ . Allora, come si è dimostrato a lezione,  $A$  è sindetico, ovvero ha buchi limitati da un certo  $k$ . Ma allora  $\sum_n \frac{1}{a_n} \geq \sum_n \frac{1}{kn} = \frac{1}{k}(+\infty)$ , assurdo. Quindi  $\bar{d}(A) = 0$  e di conseguenza  $\underline{d}(A) = 0$ . □

**Esercizio 4.** Sia  $B \subset \mathbb{N}$ . Se  $\underline{d}(B) = \alpha$  allora  $\exists A \subset B$  t.c.  $d(A) = \alpha$ .

*Dim.* Sia  $b_n = \frac{|B \cap [1, n]|}{n}$ ; si tratta di una successione a valori in  $[0, 1]$ , e ammette dunque una sottosuccessione convergente (ad  $\alpha$  necessariamente)  $b_{n_k}$ . Sia  $F = \{n_k\}$  l'insieme degli indici della sottosuccessione. Definiamo provvisoriamente  $A = B$ . Vogliamo ora scremare  $A$  in modo tale che, definita  $a_n$  analogamente a  $b_n$ , risulti

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$$

per ogni  $n \in [n_k, n_{k+1})$ . In tal modo avremmo  $\liminf a_n \geq \alpha$  e  $\limsup a_n \leq \alpha$ . È sufficiente selezionare, fra gli elementi di  $B$ , un elemento ogni  $\frac{1}{a_{n_k}}$  fra  $n_k$  e  $n_{k+1}$ , come risulta dall'equazione in  $h$

$$\frac{n_k a_{n_k} + 1}{n_k + h} = a_{n_k}$$

(ricordiamo che  $n_k a_{n_k}$  è il numero di elementi di  $A$  nell'intervallo  $[1, n_k]$ ). Tale costruzione di  $A$  si può dunque fare in maniera ricorsiva. Bisogna tuttavia osservare che  $B$  potrebbe non contenere elementi in  $(n_k, n_{k+1})$ , e quindi potrebbe non essere possibile costruire  $A$  in quell'intervallo come si è detto. Ma ciò significa solo che  $b_n$  non aumenta in quell'intervallo, e quindi  $a_n - b_n$  non risulta influenzato se lasciamo  $A$  vuoto in quell'intervallo, e in particolare il  $\liminf$  di  $A$  non diminuisce rispetto a quello di  $B$ , né il  $\limsup$  aumenta. Con questa costruzione abbiamo dunque:

$$\liminf_n a_n = \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} a_\nu \approx \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} \left( b_\nu \pm \frac{1}{n_\nu} \right) \approx \min_{\nu} b_{n_\nu} = \alpha$$

$$\limsup_n a_n = \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} a_\nu \approx \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} \left( b_\nu \pm \frac{1}{n_\nu} \right) \approx \max_{\nu} b_{n_\nu} = \alpha$$

**Esercizio 5.** Sono equivalenti:

- (1)  $A$  è spesso;
- (2)  $\exists I \subseteq {}^*A$  intervallo infinito ( $I = [\mu, \nu]$  con  $\nu - \mu$  infinito);
- (3)  $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}$  esiste  $I, |I| = \nu$  incluso in  ${}^*A$ .

(4)  $\exists \xi \in {}^*\mathbb{N}$  t.c.  $A_\xi = \{n \in \mathbb{N} \mid \xi + n \in {}^*A\}$  è proprio  $\mathbb{N}$ .

(5)  $A^c$  non è sindetico.

Dim.

(1)  $\iff$  (2) Se per ogni  $k$  esiste un intervallo  $[a_k, b_k]$  di lunghezza  $k$  contenuto in  $A$ , sia  $\mu = \langle a_k \rangle$  e  $\nu = \langle b_k \rangle$ :  $[\mu, \nu]$  è un intervallo infinito contenuto in  ${}^*A$ . Il viceversa è del tutto analogo.

(1)  $\implies$  (3) Basta considerare gli intervalli  $[a_{x_k}, b_{x_k}]$  come definiti sopra, dove  $\nu = \langle x_k \rangle$

(3)  $\implies$  (2) Immediato.

(2)  $\implies$  (4) Sia  $\xi = \mu$ , Se esistesse  $n \notin A_\xi$ , poiché  $I$  è un intervallo, dovremmo avere  $|I| \leq n$ , assurdo perché  $I$  è infinito.

(4)  $\implies$  (2) Sia  $\mu = \xi$ . Per overspill esiste  $\alpha \in A_\xi$  infinito, dato che  $A_\xi$  è interno in quanto associato alla successione di insiemi  $\langle A_{\geq x_n} \rangle$  dove  $\xi = \langle x_n \rangle$ . Quindi  $[\mu, \mu + \alpha]$  è contenuto in  ${}^*A$ .

(1)  $\implies$  (5) Se  $A$  è spesso, il suo complementare non può avere buchi limitati, poiché tali buchi sono gli intervalli massimali di  $A$ , che per definizione non sono uniformemente limitati.

(5)  $\implies$  (1) Se  $A^c$  non è sindetico significa che ha buchi arbitrariamente lunghi, che saranno contenuti in  $A$ : dunque  $A$  è spesso.

□

**Esercizio 6.** *Dualmente, sono equivalenti*

(1)  $B$  sindetico;

(2)  ${}^*B$  non ha buchi infiniti, cioè per ogni  $I$  intervallo infinito vale  $I \cap {}^*B \neq \emptyset$ ;

(3)  $\exists k \in \mathbb{N}$  t.c.  ${}^*B$  ha solo buchi di lunghezza minore o uguale a  $k$ .

Dim.

(1)  $\implies$  (2) Se così non fosse, avremmo una successione di intervalli contenuti in  $B^c$  della forma  $[a_n, b_n]$  con  $b_n - a_n$  frequentemente crescente, il che è assurdo.

(2)  $\implies$  (3) La tesi segue dal principio di overspill come nell'esercizio precedente.

(3)  $\implies$  (1) Se  $B^c$  contenesse intervalli arbitrariamente lunghi avremmo una successione  $b_n - a_n$  (estremi di intervalli) strettamente crescente, assurdo.

**Esercizio 7.**

1.  $A \subseteq \mathbb{Z}$  sindetico  $\iff$  esiste  $F$  sottoinsieme finito di  $\mathbb{Z}$  t.c.  $A + F = \mathbb{Z}$ .

2.  $A$  spesso  $\iff$  per qualunque  $F$  sottoinsieme finito di  $\mathbb{Z}$  esiste  $x$  t.c.  $x + F \subseteq A$ .

Dim.

1.  $A$  ha buchi limitati da  $k$  implica che  $A + [-k, k] = \mathbb{Z}$ .  
Viceversa, se  $A + F = \mathbb{Z}$  allora ogni intervallo di lunghezza maggiore di  $\max\{|f| \mid f \in F\}$  deve intersecare  $A$ , altrimenti avremmo  $A + F \not\supseteq I$ .
2. Sia  $k = |F|$ , e sia  $I \subseteq A$ ,  $|I| \geq k$ . Allora  $(\min I) + F \subseteq I$ .  
Viceversa, sia  $I_n = [1, n]$ . Poiché per ogni  $n$  esiste  $x$  t.c.  $x + I_n \subseteq A$ , significa che  $[x + 1, x + n] \subseteq A$ . Quindi  $A$  è spesso.

**Esercizio 8** (Caratterizzazione nonstandard dei sintetici a tratti).  $A \subseteq \mathbb{N}$  è *sindetico a tratti*  $\iff$  esiste  $I$  infinito t.c.  ${}^*A \cap I$  è *sindetico* in  ${}^*\mathbb{N}$ .

Dim.

$\implies$   $A$  sintetico a tratti. Dunque esiste una successione di intervalli  $I_n, |I_n| = n$ , t.c.  $A \cap I_n$  è sintetico con costante uniforme  $k$  indipendente da  $n$ . L'insieme di ipernaturali

$${}^*\langle A \cap I_n \rangle = {}^*A \cap {}^*\langle I_n \rangle = {}^*A \cap I$$

è sintetico, dato che la costante è uniforme e dunque la limitatezza dei buchi passa al modello nonstandard.

$\impliedby$  Sia  $I = [\mu, \nu]$ ,  $\mu = \langle a_n \rangle, \nu = \langle b_n \rangle$ . Allora se  ${}^*A \cap I$  è sintetico con costante  $k$ , per quasi ogni  $n$  (ma ci basta a meno di prendere dei sottointervalli degli  $I_n$ )  $A \cap I_n$  è sintetico con costante  $k$ .