Esercizi per il corso “ultrafiltri e metodi non standard”

Marco Usula

Anno accademico 2014/2015

Lezioni 7,8,9,10

Notazioni Indicherò con ω l'insieme $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, e con $\mathbb{N}$ l'insieme $\omega \setminus \{0\}$.
I simboli $\subset$ e $\supset$ indicano inclusioni *strette* tra insiemi.

7 Esercizi 23-3-2015

Nota. Per definizione, dato $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ limitato, si definisce $\mathrm{st}(\alpha)$ come l'*unico* numero reale tale che $\alpha - \mathrm{st}(\alpha)$ sia infinitesimo. Estendiamo la notazione al caso in cui α sia illimitato: se $\alpha > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora poniamo $\mathrm{st}(\alpha) = +\infty$; se $\alpha < -n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora poniamo $\mathrm{st}(\alpha) = -\infty$. Estendiamo l'ordine di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in modo usuale.

Esercizio 7.1. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di reali, e sia $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dimostrare che $a(n) \to l$ se e solo se per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ vale $\mathrm{st}({}^*a(\nu)) = l$.

Dimostrazione. Dimostriamolo nel caso in cui l sia finito. I casi $l = \pm\infty$ sono analoghi.
($\Rightarrow$) Se $a(n) \to l$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq N_\epsilon \to |a(n) - l| < \epsilon \right).$$

Per il Transfer, si ha

$$\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \left(\nu \geq N_\epsilon \to |{}^*a(\nu) - l| < \epsilon \right).$$

Ora, se $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, si ha che $\nu \geq N_\epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ (in quanto $N_\epsilon \in \mathbb{N}$), e quindi $|{}^*a(\nu) - l| < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$, da cui che ${}^*a(\nu) - l$ è infinitesimo, ossia ${}^*a(\nu) \sim l$.
($\Leftarrow$) Se ${}^*a(\nu) \sim l$ per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, allora, per ogni $\epsilon > 0$, è vero che

$$(\exists N \in {}^*\mathbb{N}) (\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}) \left(\nu \geq N \to |{}^*a(\nu) - l| < \epsilon \right):$$

infatti, basta prendere $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Per il Transfer, abbiamo che

$$(\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n \geq N \to |a(n) - l| < \epsilon \right)$$

ossia che $a(n) \to l$. $\square$

Esercizio 7.2. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di reali. Dimostrare che, dato $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, a ha una sottosuccessione convergente ad s se e solo se esiste $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che $\operatorname{st}({}^*a(\nu)) = s$.

Dimostrazione. Dimostriamolo nel caso in cui s sia finito. I casi $s = \pm\infty$ sono analoghi. Ricordiamo inoltre la seguente proprietà generale: se $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to B, g : B \to C$, allora ${}^*(g \circ f) = {}^*g \circ {}^*f : {}^*A \to {}^*C$.
$(\Rightarrow)$ Supponiamo che esista una sottosuccessione di a convergente ad s. Allora esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente tale che la successione $b = a \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a s. Per l'esercizio precedente, abbiamo che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ si ha ${}^*b(\nu) \sim s$, ossia ${}^*a({}^*f(\nu)) \sim s$. Per concludere basta dimostrare che se $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, allora anche ${}^*f(\nu) \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Ma questo è ovvio: infatti, f è crescente, e quindi lo è anche ${}^*f$ per Transfer, per cui deve essere ${}^*f(\nu) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque ${}^*f(\nu) \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$.
$(\Leftarrow)$ Supponiamo che ${}^*a(\nu) \sim s$ per un certo $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Allora, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ con $\epsilon > 0$, si ha

$$\exists \xi \in {}^*\mathbb{N} \left(\xi > n \wedge |{}^*a(\xi) - s| < \epsilon\right) :$$

infatti, basta prendere $\xi = \nu$. Ora, per il Transfer, si ha

$$\exists m \in \mathbb{N} \left(m > n \wedge |a(m) - s| < \epsilon\right).$$

Definiamo allora induttivamente

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ 1 &\mapsto \min\{m \in \mathbb{N} : |a(n) - s| < 1\} \\ k+1 &\mapsto \min\left\{m \in \mathbb{N} : m > f(k) \wedge |a(m) - s| < \frac{1}{k+1}\right\}. \end{aligned}$$

La funzione f è ben definita in quanto gli insiemi di cui si prende il minimo sono tutti non vuoti, per la proprietà appena dimostrata con il Transfer. Inoltre, la f è chiaramente crescente. Per concludere mostriamo che $a \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una successione convergente a s. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$|(a \circ f)(k) - s| < \frac{1}{k}$$

per costruzione: allora, per confronto, si ha che $a \circ f$ è convergente a s, come volevasi dimostrare. $\square$

Esercizio 7.3. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di reali. Allora

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(a(n)) &= \max\{\operatorname{st}({}^*a(\nu)) : \nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}\} \\ \liminf_{n\to\infty}(a(n)) &= \min\{\operatorname{st}({}^*a(\nu)) : \nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

(dove i valori precedenti si intendono in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Dimostrazione. Ricordiamo che, data una successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ di reali, l'insieme dei limiti di sottosuccessioni di x ammette massimo e minimo in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: il massimo coincide con il limite superiore di x, e il minimo coincide con il limite inferiore. Allora la tesi discende direttamente dall'esercizio precedente. $\square$

Osservazione. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Prima di svolgere l'esercizio precedente, facciamo qualche precisazione. Ricordiamo che, se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, allora l'insieme dei sottoinsiemi interni di ${}^*A$ è la famiglia ${}^*\mathcal{P}(A)$. Ora, sia $FIN \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$. Indichiamo con ${}^*FIN$ l'insieme dei sottoinsiemi *iperfiniti* di ${}^*\mathbb{N}$. Osserviamo che:

1. Dato che $FIN \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, per Transfer si ha ${}^*FIN \subseteq {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e quindi gli insiemi iperfiniti sono sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{N}$.

2. Per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, l'insieme $[1,\nu]$ è iperfinito. Infatti, nel modello standard vale
$$(\forall n \in \mathbb{N})\,([1,n] \in FIN)$$
e quindi nel modello nonstandard vale
$$(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})\,([1,\nu] \in {}^*FIN)\,.$$

3. Dato che, per ogni $A \in FIN$, esiste un naturale $n \in \mathbb{N}$ e una bigezione di A con $[1,n]$, allora, per Transfer, per ogni $A \in {}^*FIN$ esiste un ipernaturale $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ e una bigezione interna di A con $[1,\nu]$. Per la precisione, la mappa "cardinalità" $|\cdot| : FIN \to \mathbb{N}$ soddisfa l'enunciato
$$(\forall A \in FIN)\,(\exists f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))\,(f \text{ è una bigezione tra } A \text{ e } [1,|A|])\,;$$
allora, per Transfer, la mappa ${}^*|\cdot| : {}^*FIN \to {}^*\mathbb{N}$ soddisfa l'enunciato con quantificatori limitati
$$(\forall A \in {}^*FIN)\,(\exists f \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))\,(f \text{ è una bigezione tra } A \text{ e } [1,{}^*|A|])\,.$$
La funzione ${}^*|\cdot| : {}^*FIN \to {}^*\mathbb{N}$ verrà chiamata *ipercardinalità*.

4. Se A è un sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{N}$ e A è contenuto in un insieme iperfinito, allora A è iperfinito. Infatti, vale l'enunciato
$$(\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\,[(\exists B \in FIN)\,(A \subseteq B) \to A \in FIN]$$
e quindi, per Transfer, vale l'enunciato
$$(\forall A \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}))\,[(\exists B \in {}^*FIN)\,(A \subseteq B) \to A \in {}^*FIN]\,.$$
Dato che gli interni sono chiusi per intersezione, si ha quindi che, se B è un sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{N}$ e $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, allora $B \cap [1,\nu]$ è iperfinito.

Esercizio 7.4. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Dimostrare che
$$\overline{d}(A) = \max\left\{\mathrm{st}\left(\frac{{}^*|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu}\right) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\right\}.$$

Dimostrazione. Sia
$$\begin{array}{rcl} a : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{|A \cap [1,n]|}{n} \end{array} ;$$

allora per definizione si ha

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty}(a(n)).$$

Applicando l'esercizio precedente, si ha

$$\overline{d}(A) = \max\{\mathrm{st}({}^*a(\nu)) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\} :$$

allora, per concludere, è sufficiente far vedere che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ si ha

$${}^*a(\nu) = \frac{{}^*\left|{}^*A \cap [1,\nu]\right|}{\nu}.$$

Questo è immediato usando il Transfer e ricordando che ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$. $\square$

Osservazione. Analogamente si dimostra che

$$\underline{d}(A) = \min\left\{\mathrm{st}\left(\frac{{}^*\left|{}^*A \cap [1,\nu]\right|}{\nu}\right) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\right\}.$$

Esercizio 7.5. Sia X un insieme. Data $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, indichiamo con $\mathcal{F}^*$ la famiglia dei sottoinsiemi di X che intersecano ogni elemento di $\mathcal{F}$. Dimostrare che se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è non vuota, chiusa per soprainsiemi e PR, allora $\mathcal{F}^*$ è un filtro su X. Dedurre che la famiglia $\Delta^* \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ è un filtro su $\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Usiamo le seguenti osservazioni generali:

1. Se $\mathcal{F} \neq \emptyset$ allora ovviamente $\emptyset \notin \mathcal{F}^*$.

2. Se $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi allora $\mathcal{F}^*$ è chiusa per soprainsiemi. Infatti, se $A \subseteq B$ e $A \in \mathcal{F}^*$, allora dato che A interseca ogni elemento di $\mathcal{F}$ allora anche B interseca ogni elemento di $\mathcal{F}$.

3. Se $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi, allora $\mathcal{F}^* = \{S \subseteq X : S^c \notin \mathcal{F}\}$. Infatti, se $S \in \mathcal{F}^*$, allora S interseca ogni elemento di $\mathcal{F}$, e quindi $S^c \notin \mathcal{F}$; viceversa, se $S \notin \mathcal{F}^*$, allora esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $S \cap F = \emptyset$, e quindi $F \subseteq S^c$, da cui che, essendo $\mathcal{F}$ chiusa per soprainsiemi, si ha $S^c \in \mathcal{F}$.

Ora, sia $\mathcal{F}$ non vuota, chiusa per soprainsiemi e PR. Allora $\mathcal{F}^*$ è non vuota e chiusa per soprainsiemi per i punti $1, 2$. Dimostriamo che $\mathcal{F}^*$ è chiusa per intersezione. Siano $A, B \in \mathcal{F}^*$, e supponiamo per assurdo che $A \cap B \notin \mathcal{F}^*$. Allora $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$, ossia $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$, e quindi essendo $\mathcal{F}$ PR abbiamo $A^c \in \mathcal{F} \vee B^c \in \mathcal{F}$. Ma $A \in \mathcal{F}^*$ e $B \in \mathcal{F}^*$, e quindi $A^c \notin \mathcal{F} \wedge B^c \notin \mathcal{F}$, assurdo.
Ovviamente la famiglia $\Delta \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ è non vuota e chiusa per soprainsiemi. Abbiamo visto in un esercizio precedente che Δ è anche PR. Allora, per quanto appena dimostrato, Δ^* è un filtro su $\mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 7.6. Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$. Dimostrare che $BD(A) = 1$ se e solo se A è spesso.

Dimostrazione. Definiamo la $\mathbb{N}$-successione

$$a_n = \max_{z\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [z+1, z+n]|}{n}.$$

Allora per definizione si ha

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Se A è spesso, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo $I = [x+1, x+n]$ con $x \in \mathbb{Z}$ tale che $I \subseteq A$, e quindi per ogni n si ha $a_n = 1$, da cui che $BD(A) = 1$. Viceversa, sia $BD(A) = 1$, e supponiamo per assurdo che A non sia spesso. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che A non contenga alcun intervallo lungo k. Questo implica che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $z \in \mathbb{Z}$, si ha

$$|A \cap [z+1, x+nk]| \leq n(k-1),$$

in quanto $[z+1, z+nk]$ è l'unione disgiunta di n intervalli consecutivi lunghi k, nessuno dei quali è contenuto in A. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_{nk} \leq \frac{n(k-1)}{nk} = \frac{k-1}{k}.$$

Questo significa che a_{nk} non può convergere a 1 per $n \to \infty$, e questo è assurdo in quanto $(a_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di una successione di reali convergente a 1. $\square$

Esercizio 7.7. Trovare un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ spesso tale che $\overline{d}(A) = 0$.

Dimostrazione. Definiamo

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2^n+1, 2^n+n].$$

Ovviamente A è spesso. Verifichiamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$$

converge a 0, e quindi $\overline{d}(A) = 0$. Dato che per ogni $k < n$ si ha $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+1}$ e $\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}$, la successione è strettamente crescente negli intervalli $[2^n+1, 2^n+n]$, mentre è strettamente decrescente negli intervalli $\left[2^n+n+1, 2^{n+1}\right]$. Dunque i "massimi relativi" della successione sono assunti negli indici 2^n+n. Dato che la successione è ≥ 0, ci basta quindi far vedere che la sottosuccessione $b_n = a_{2^n+n}$ converge a 0. Se chiamiamo $c_n = |A \cap [1, 2^n+n]|$, allora $b_n = \frac{c_n}{2^n+n}$. Ora, è evidente che $c_{n+1} = c_n + n + 1$; dato che $c_1 = 1$, si ottiene che $c_n = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e quindi

$$b_n = \frac{n(n+1)}{2(2^n+n)}$$

che ovviamente converge a 0. Ne consegue la tesi. $\square$

8 Esercizi 24-3-2015

Esercizio 8.1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ disgiunti. Allora

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B).$$

Dimostrazione. Chiamiamo $a_\nu = \frac{^*|^*A \cap [1,\nu]|}{\nu}$, $b_\nu = \frac{^*|^*B \cap [1,\nu]|}{\nu}$ e $c_\nu = \frac{^*|^*(A\cup B) \cap [1,\nu]|}{\nu}$. Grazie al Transfer, si ha $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$ e $^*A \cap {}^*B = \emptyset$. Inoltre, sempre con il Transfer, si verifica che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ si ha ${}^*\left|{}^*(A \cup B) \cap [1,\nu]\right| = {}^*\left|{}^*A \cap [1,\nu]\right| + {}^*\left|{}^*B \cap [1,\nu]\right|$. Ne consegue che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ si ha $c_\nu = a_\nu + b_\nu$. Ora, abbiamo già dimostrato in un esercizio precedente che

$$\overline{d}(A) = \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu):$$

in modo esattamente analogo si dimostra che

$$\underline{d}(A) = \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu).$$

Ricordiamo che $\mathrm{st}(\alpha) + \mathrm{st}(\beta) = \mathrm{st}(\alpha + \beta)$. La tesi discende allora dalla seguente catena di disuguaglianze ovvie:

$$\begin{aligned}
\min_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu) + \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(b_\nu) &\leq \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu) + \mathrm{st}(b_\nu) \\
&\leq \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu) + \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(b_\nu) \\
&\leq \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu) + \mathrm{st}(b_\nu) \\
&\leq \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(a_\nu) + \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}} \mathrm{st}(b_\nu).
\end{aligned}$$

□

Esercizio 8.2. Se $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ e la serie $\sum_n \frac{1}{a_n}$ converge, allora $d(A) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$d(A) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = 0.$$

Definiamo $b_k = \frac{|A \cap [1,k]|}{k}$ per $k \in \mathbb{N}$: allora si ha $d(A) = 0 \iff b_k \to 0$: la successione $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è non negativa, e assume i suoi "punti di massimo relativo" quando $k = a_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ (precisamente per gli n tali che $a_n + 1 \notin A$). Dunque, $b_k \to 0$ per $k \to \infty$ se e solo se $b_{a_n} \to 0$ per $n \to \infty$; ma $b_{a_n} = \frac{|A\cap[1,a_n]|}{a_n} = \frac{n}{a_n}$, e quindi $d(A) = 0 \iff \frac{n}{a_n} \to 0$ per $n \to \infty$, come volevasi dimostrare. Per concludere, utilizziamo il seguente

Lemma. *Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di reali positivi tale che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sia convergente. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

Dimostrazione. Per il criterio di condensazione di Cauchy, la serie $\sum_{n\in\omega} 2^n b_{2^n}$ è convergente, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} 2^n b_{2^n} = 0.$$

Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $k_n \in \omega$ come il minimo elemento di ω tale che valga la disuguaglianza $n < 2^{k_n}$. Allora, dato che la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, si ha

$$nb_n < 2^{k_n} b_{2^{k_n}}.$$

Ovviamente, per $n \to \infty$ si ha $k_n \to \infty$, e per $k_n \to \infty$ il termine a destra della disuguaglianza precedente converge a 0. Allora, per confronto, anche $nb_n \to 0$. □

Ora, dato che la successione $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente e $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{a_n}$ converge, si ha che $\frac{n}{a_n}\to 0$ per $n\to\infty$, come volevasi dimostrare.

□

Esercizio 8.3. (Underspill) Siano $A\subseteq{}^*\mathbb{N}$ e $B\subseteq{}^*\mathbb{N}$ interni. Dimostrare che:

1. Se A contiene ipernaturali infiniti arbitrariamente piccoli, allora A interseca $\mathbb{N}$.
2. Se $\forall\xi\in{}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ si ha $[\xi,+\infty]\subseteq A$, allora esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $[n,+\infty]\subseteq A$.
3. Se $[-\epsilon,\epsilon]\subseteq B$ per ogni $\epsilon\sim 0$, allora esiste $0<r\in\mathbb{R}$ tale che $[-r,r]\subseteq B$.

Dimostrazione. Ricordiamo che i sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{N}$ sono gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e i sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{R}$ sono gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

1. Innanzitutto, essendo $A\subseteq{}^*\mathbb{N}$ interno, A ammette minimo, in quanto ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo. Volendo essere rigorosi, nel modello standard vale $(\forall X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}))\,(\exists x\in X)\,(\forall y\in X)\,(x\leq y)$, e quindi per Transfer nel modello nonstandard vale $(\forall X\in{}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}))\,(\exists x\in X)\,(\forall y\in X)\,(x\leq y)$. Ora, sia ξ il minimo di A: allora ξ non può stare in ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, in quanto allora $\xi-1$ sarebbe un ipernaturale infinito strettamente minore di tutti gli elementi di A. Ne consegue che $\xi\in\mathbb{N}$, e quindi A interseca ξ.

2. Sia C l'insieme degli $a\in A$ tali che $[a,+\infty]\subseteq A$. Allora C è interno. Infatti,
$$C=\{a\in A:(\forall x\in{}^*\mathbb{N})\,(x\geq a\to x\in A)\},$$
dunque C è il sottoinsieme di un interno definito (relativamente a tale interno) da una formula con quantificatori limitati e parametri interni, e quindi è interno. Allora, come abbiamo visto nel punto 1, C ha minimo in $\mathbb{N}$. Sia n tale minimo: allora, per definizione di C, abbiamo che $[n,+\infty]\subseteq A$.

3. Sia C l'insieme dei $b\in B$ tali che $b>0$ e $[-b,b]\subseteq B$. Allora C è interno. Infatti,
$$C=\{b\in B:(b>0)\wedge(\forall x\in{}^*\mathbb{R})\,(-b\leq x\leq b\to x\in B)\}$$
e quindi si ragiona come nel punto precedente. Ora, se C è superiormente illimitato, la tesi è ovvia, quindi supponiamo che C sia superiormente limitato. Essendo $C\subseteq{}^*\mathbb{R}$ interno, C ammette sup in ${}^*\mathbb{R}$, in quanto ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha sup in $\mathbb{R}$. Volendo essere rigorosi, nel modello standard vale
$$(\forall X\in\mathcal{P}(\mathbb{R}))\,[X \text{ limitato superiormente in } \mathbb{R}\to(\exists\sup\in\mathbb{R})\,(\sup \text{ è il minimo dei maggioranti di } X \text{in } \mathbb{R})]$$
(dove "X limitato superiormente" e "sup è il minimo dei maggioranti di X" sono esprimibili con ovvie formule con quantificatori limitati e unico parametro $\mathbb{R}$), e quindi per Transfer nel modello nonstandard vale la stessa formula con ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a sostituire $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e ${}^*\mathbb{R}$ a sostituire $\mathbb{R}$. Ora, sia $\gamma=\sup(C)$. Osserviamo che non può essere $\gamma\sim 0$: infatti, se $\gamma\sim 0$, allora $2\gamma\sim 0$, e quindi $[-2\gamma,2\gamma]\subseteq B$ da cui che, essendo $\gamma=\sup(C)$, si ha $\gamma\geq 2\gamma$ da cui $1\geq 2$, assurdo. Allora certamente esiste $r\in\mathbb{R}$ tale che $0<r<\gamma$, e quindi esiste $\alpha\in{}^*\mathbb{R}$ tale che $r<\alpha<\gamma$ da cui $[-\alpha,\alpha]\subseteq B$, e quindi $[-r,r]\subseteq B$.

□

Esercizio 8.4. La lunghezza di un intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è l'ipernaturale $\beta - \alpha + 1$. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

1. A è spesso.
2. Per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ esiste un intervallo di lunghezza ν con $I \subseteq {}^*A$.
3. ${}^*A$ contiene un intervallo di ipernaturali di lunghezza infinita.
4. Esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Dato che A è spesso, A contiene intervalli arbitrariamente lunghi. Allora nel modello standard vale l'enunciato

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists a \in A)\,(\forall x \in \mathbb{N})\,(a \leq x \leq a + n \rightarrow x \in A)\,,$$

e quindi per Transfer nel modello nonstandard vale l'enunciato

$$(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})\,(\exists a \in {}^*A)\,(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(a \leq x \leq a + \nu \rightarrow x \in {}^*A)\,.$$

Ne consegue la tesi.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Ovvio.
3. $(3 \Rightarrow 4)$ Se $[\alpha, \beta] \subseteq {}^*A$ ha lunghezza infinita, allora $\beta - \alpha \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha + n < \beta$. Ne consegue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha + n \in [\alpha, \beta] \subseteq {}^*A$ e quindi la tesi.
4. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia

$$C = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : \xi + \nu \in {}^*A\}\,:$$

allora C è un sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{N}$ contenente $\mathbb{N}$, e quindi per overspill deve contenere un intervallo infinito $[1, \nu]$. Ne consegue che ${}^*A$ contiene l'intervallo infinito $[\xi + 1, \xi + \nu]$.

□

Esercizio 8.5. Sia $B \subseteq \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

1. B è sindetico.
2. Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza $\leq k$.
3. ${}^*B$ non ha buchi infiniti, ossia interseca ogni intervallo infinito.
4. Per ogni $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ si ha $B_\xi = \{n \in \mathbb{N} : \xi + n \in {}^*B\} \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $B^c = \mathbb{N} \backslash B$, allora ${}^*(B^c) = ({}^*B)^c = {}^*\mathbb{N} \backslash {}^*B$: infatti, nel modello standard vale $(\forall x \in \mathbb{N})\,(x \in B^c \leftrightarrow x \notin B)$ e quindi nel modello nonstandard vale $(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(x \in {}^*(B^c) \leftrightarrow x \notin {}^*B)$.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia B sindetico. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ che limita la lunghezza di un qualunque buco di B, ossia nel modello standard vale

$$(\forall a \in \mathbb{N})\,(\forall b \in \mathbb{N})\,([a,b] \subseteq B^c \to b - a + 1 \leq k)$$

(dove la formula $[a,b] \subseteq B^c$ è un modo veloce per scrivere $(\forall x \in \mathbb{N})\,(a \leq x \wedge x \leq b \to x \in B^c)$). Allora, per Transfer, nel modello nonstandard vale

$$(\forall \alpha \in {}^*\mathbb{N})\,(\forall \beta \in {}^*\mathbb{N})\,([\alpha,\beta] \subseteq {}^*B^c \to \beta - \alpha + 1 \leq k)$$

e questo prova che ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza $\leq k$.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Ovvia.

3. $(3 \Rightarrow 4)$ Supponiamo per assurdo che $B_\xi = \emptyset$ per un certo $\xi \in {}^*\mathbb{N}$. Sia

$$C = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : \xi + \nu \in {}^*B^c\} :$$

allora C è interno e contiene $\mathbb{N}$, dunque per overspill deve contenere un intervallo $[1,\nu]$ con $\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$: questo è assurdo, perchè allora ${}^*B^c$ conterrebbe l'intervallo infinito $[\xi+1, \xi+\nu]$ e quindi ${}^*B$ avrebbe un buco infinito.

4. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia vero che per ogni $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ si ha $B_\xi \neq \emptyset$, e supponiamo per assurdo che B non sia sindetico. Allora B^c è spesso, e quindi per il punto 4 dell'esercizio precedente esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $(B^c)_\xi = \{n \in \mathbb{N} : \xi + n \in {}^*(B^c)\} = \mathbb{N}$. Ora osserviamo che $(B^c)_\xi = (B_\xi)^c$: infatti, $n \in (B^c)_\xi$ se e solo se $\xi + n \in {}^*(B^c) = ({}^*B)^c$ se e solo se $\xi + n \notin {}^*B$ se e solo se $n \notin B_\xi$. Allora, dato che $B_\xi^c = \mathbb{N}$, deve essere $B_\xi = \emptyset$, assurdo.

□

Esercizio 8.6. Sia I un insieme infinito. Allora βI non è metrizzabile.

Dimostrazione. Osserviamo che in ogni spazio metrico (X,d), per ogni punto $x \in X$ esiste una base locale in x numerabile tale che la sua intersezione coincida con $\{x\}$: basta prendere gli insiemi $B_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in X : d(y,x) < \frac{1}{n}\right\}$.
Supponiamo ora per assurdo che βI sia uno spazio metrico. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su I: allora esiste una base locale in $\mathcal{U}$ numerabile $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{\mathcal{U}\}$. Dato che gli $\{\mathcal{O}_A : A \subseteq I\}$ sono una base della topologia su βI, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\mathcal{O}_{A_n}$ tale che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{A_n} \subseteq B_n$: allora anche $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n} = \{\mathcal{U}\}$, ossia $\mathcal{U}$ è l'unico ultrafiltro su I che contiene ogni A_n. Questo implica che la famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genera $\mathcal{U}$: infatti, la famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP perchè è una sottofamiglia di $\mathcal{U}$, e quindi il filtro da essa generata deve essere proprio $\mathcal{U}$ (altrimenti potremmo estenderla a due ultrafiltri distinti). Questo è assurdo: infatti, vale il seguente

Lemma. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro nonprincipale su un insieme infinito I. Allora $\mathcal{U}$ non può essere generato da una famiglia numerabile di sottoinsiemi di I.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{U}$ sia generato dalla famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \subseteq I$. Allora:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ è infinito, in quanto sta in $\mathcal{U}$ che è non principale.

2. Per ogni $B \subseteq I$, la famiglia $\{B\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP se e solo se $B \in \mathcal{U}$. Infatti, la direzione $\Leftarrow$ è ovvia, mentre se $\{B\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP allora si estende ad un filtro $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$, da cui che essendo $\mathcal{U}$ massimale abbiamo $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ e quindi $B \in \mathcal{U}$.

Definiamo ora induttivamente due insiemi $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo: scegliamo $x_1 \in A_1$ e $y_1 \in A_1 \setminus \{x_1\}$ arbitrariamente; continuiamo scegliendo $x_2 \in A_1 \cap A_2$ e $y_2 \in A_1 \cap A_2 \setminus \{x_1\}$; al passo n-esimo, scegliamo $x_n \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$ e $y_n \in A_1 \cap \cdots \cap A_n \setminus \{x_1, ..., x_n\}$. Osserviamo che le scelte degli y_n sono possibili in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ è infinito. Ora, per costruzione, X e Y sono disgiunti: inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} x_n &\in A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap X \\ y_n &\in A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap Y \end{aligned}$$

e quindi le famiglie $\{X\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hanno la FIP. Ma allora $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathcal{U}$, assurdo in quanto X e Y sono disgiunti.

□

□

9 Esercizi 27-3-2015

Esercizio 9.1. Un $A \subseteq \mathbb{Z}$ è sindetico se e solo se esiste $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito tale che $A + F = \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Se A è sindetico, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni buco di A sia di ampiezza al più n. Allora, se prendiamo $F = \{1, ..., n\}$, si ha $A + F = \mathbb{Z}$: infatti, se $x \notin A$ allora esiste $x_0 \in A$ tale che $0 \leq x - x_0 = k \leq n$, e quindi $x_0 + k = x \in A + F$, da cui per la generalità di x si ha la tesi. Viceversa, sia A non sindetico, e sia F insieme finito. Definiamo

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \min\left((F \cap (-\infty, 0)) \cup \{0\}\right) \\ f_{\max} &= \max\left((F \cap (0, +\infty)) \cup \{0\}\right) : \end{aligned}$$

allora, dato che A non è sindetico, esisterà un $x \notin A$ tale che, detto $x_0 = \max\{a \in A : a < x\}$ e detto $x_1 = \min\{a \in A : a > x\}$, si abbia $x_0 + f_{\max} < x < x_1 + f_{\min}$. Questo implica che $x \notin A + F$. □

Esercizio 9.2. Un $A \subseteq \mathbb{Z}$ è spesso se e solo se per ogni $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + F \subseteq A$.

Dimostrazione. Ovviamente la tesi $(\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito$)$ $(\exists x \in \mathbb{Z})$ $(x + F \subseteq A)$ equivale all'enunciato $(\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito$)$ $(\exists x \in \mathbb{Z})$ (
Usando l'esercizio precedente, abbiamo che: A è spesso $\iff$ A^c *non* è sindetico $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito si ha $A^c + F \not\subseteq \mathbb{Z}$ $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x \notin A^c + F$ $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $f \in F$ si ha $x - f \notin A^c$ $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x - F \subseteq A$. □

Esercizio 9.3. Dimostrare che le famiglie dei sindetici di $\mathbb{Z}$ e degli spessi di $\mathbb{Z}$ non sono regolari per partizioni.

Dimostrazione. Non sono neanche debolmente regolari per partizioni su $\mathbb{Z}$. Infatti:

1. $\mathbb{Z}$ è sindetico, ma l'insieme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left[n^2, n^2+n\right] \cup \left[-n^2, -\left(n^2+n\right)\right] \right)$ è spesso con complementare spesso, e quindi sia A che A^c non sono sindetici.

2. $\mathbb{Z}$ è spesso, ma sia $PARI$ che $DISPARI$ non sono spessi.

$\square$

Esercizio 9.4. Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se e solo se esiste un I intervallo infinito di ipernaturali tale che i buchi di ${}^*A \cap I$ siano di ampiezza finita.

Dimostrazione. Dato che A è sindetico a tratti, si ha $A = T \cap S$, dove T è spesso e S è sindetico. Ricordando le caratterizzazioni nonstandard degli spessi e dei sindetici, abbiamo che ${}^*T$ contiene un I intervallo infinito di ipernaturali, e che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che ogni buco di ${}^*S$ abbia ampiezza $\leq k$. Ora, abbiamo ${}^*A \cap I = {}^*(S \cap T) \cap I = {}^*S \cap {}^*T \cap I = {}^*S \cap I$, e quindi ogni buco di ${}^*A \cap I$ ha ampiezza $\leq k$, da cui la tesi. $\square$

10 Esercizi 30-3-2015

Esercizio 10.1. Sia I un insieme infinito. Dimostrare che l'ordine $\leq$ su $\frac{\beta I}{\simeq}$ non ha elementi massimali.

Dimostrazione. Dimostriamo prima due lemmi:

Lemma. *Siano I, J insiemi non vuoti, e siano $\pi_1 : I \times J \to I$ e $\pi_2 : I \times J \to J$ le proiezioni canoniche. Se $\mathcal{U} \in \beta I$ e $\mathcal{V} \in \beta J$, allora $(\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $(\pi_2)(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $(\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U}$: infatti, se $A \in \mathcal{U}$ allora $\pi_1^{-1}(A) = A \times J$ sta in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, in quanto $\{i \in I : (A \times J)_i \in \mathcal{V}\} = A \in \mathcal{U}$, in quanto

$$(A \times J)_i = \{j \in J : (i,j) \in A \times J\} = \begin{cases} I & i \in A \\ \emptyset & i \notin A \end{cases}.$$

Ne consegue che $\mathcal{U} \subseteq (\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$, e quindi dato che entrambi sono ultrafiltri su I si ha l'uguaglianza.
Dimostriamo che $(\pi_2)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$: infatti, se $A \in \mathcal{V}$ allora $\pi_2^{-1}(A) = I \times A$ sta in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, in quanto $\{i \in I : (I \times A)_i \in \mathcal{V}\} = I \in \mathcal{U}$, in quanto

$$(I \times A)_i = \{j \in J : (i,j) \in I \times A\} = A.$$

Ne consegue che $\mathcal{V} \subseteq (\pi_2)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$, e quindi dato che entrambi sono ultrafiltri su J si ha l'uguaglianza. $\square$

Lemma. *Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro nonprincipale su I, allora $\mathcal{U} < \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{U} \leq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Dal lemma precedente, abbiamo $(\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e quindi $\mathcal{U} \leq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Mostriamo ora che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq \mathcal{U}$. Supponiamo per assurdo che esista $f = (f_1, f_2) : I \to I \times I$ tale che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Allora $(\pi_1 \circ f)_* (\mathcal{U}) = (f_1)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e quindi $f_1 \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{id}_I$; analogamente, $(\pi_2 \circ f)_* (\mathcal{U}) = (f_2)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e quindi $f_2 \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{id}_I$. Ne consegue che $f \equiv_{\mathcal{U}} \delta$, dove

$\delta : I \to I \times I$ manda i in (i,i), e quindi $f_*(\mathcal{U}) = \delta_*(\mathcal{U})$. Ci resta da dimostrare che se $\mathcal{U}$ è nonprincipale allora $\delta_*(\mathcal{U}) \neq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Se $A \in \mathcal{U}$, allora $\delta(A) \in \delta_*(\mathcal{U})$: ma $\delta(A) \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, in quanto $(\delta(A))_i = \{j \in I : (i,j) \in \delta(A)\} = \{i\}$ e quindi se $\mathcal{U}$ è nonprincipale $\{i \in I : (\delta(A))_i \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$. □

Ora risolviamo l'esercizio. Sia $\mathcal{U} \in \beta I$: allora $\mathcal{U} < \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Dato che I è infinito, esiste una bigezione $f : I \times I \to I$: definiamo

$$\mathcal{V} = \{f(A) : A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\}.$$

Osserviamo che $f_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{V}$: infatti, se $B \in \mathcal{V}$ allora $B = f(A)$ per un certo $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e quindi $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A)) = A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ da cui che $B \in f_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$, mentre se $B \in f_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$ allora $f^{-1}(B) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e quindi $B = f\left(f^{-1}(B)\right) \in \mathcal{V}$. Ne consegue che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \simeq \mathcal{V}$, e quindi $[\mathcal{U}] < [\mathcal{V}]$. □

Esercizio 10.2. Sia $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. $\mathcal{U}$ è $\leq$-minimale in $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, ossia per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ si ha $\mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V} \simeq \mathcal{U}$.
2. $\mathcal{U}$ è selettivo, ossia se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione propria (ossia ogni pezzo è non vuoto) di $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $A_n \notin \mathcal{U}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $|X \cap A_n| = 1$.
3. Per ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ è costante oppure iniettiva.
4. Ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ costante oppure biunivoca.
5. Se ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$ e $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo, allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ infinitesima, e costante o strettamente monotona, tale che $[f] = \xi$.
6. Ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non decrescente.
7. $\mathcal{U}$ è di Ramsey, ossia per ogni r-colorazione di $[\mathbb{N}]^2$ esiste $H \in \mathcal{U}$ tale che $[H]^2$ sia monocromatico.

Dimostrazione. Dimostro $7 \Rightarrow (5 \iff 6) \Rightarrow (1 \iff 2 \iff 3 \iff 4)$. La dimostrazione conclusiva $2 \Rightarrow 7$ è parziale.

1. $(4 \Rightarrow 3)$ Supponiamo che non esista $A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ sia costante. Allora f non è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante, e quindi per la 4 è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca. Allora $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ e $f_{|A} = g_{|A}$, da cui che $f_{|A}$ è iniettiva.
2. $(3 \Rightarrow 4)$ Supponiamo che esista $A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ sia iniettiva. Dato che $\mathcal{U}$ è nonprincipale, A è infinito e quindi esistono $A_1 \sqcup A_2 = A$ infiniti. Osserviamo che $f_{|A_1}$ e $f_{|A_2}$ sono iniettive, e quindi $|f(A_1)| = |f(A_2)| = \aleph_0$. Ora, WLOG $A_1 \in \mathcal{U}$. Osserviamo che $|\mathbb{N}\backslash A_1| = |\mathbb{N}\backslash f(A_1)| = \aleph_0$ in quanto $A_2 \subseteq \mathbb{N}\backslash A_1$ e $f(A_2) \subseteq \mathbb{N}\backslash f(A_1)$. Allora esiste una bigezione $\mathbb{N}\backslash A_1 \to \mathbb{N}\backslash f(A_1)$, che incollata a $f_{|A_1}$ fornisce una bigezione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è $\mathcal{U}$-equivalente ad f.
3. $(2 \Rightarrow 3)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e sia $B_n = f^{-1}(n)$. Allora $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione di $\mathbb{N}$. Se $B_n \in \mathcal{U}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora dato che $f_{|B_n}$ è costantemente uguale a n abbiamo finito. Supponiamo quindi che $B_n \notin \mathcal{U}$ per ogni n. Allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che $B_n \neq \emptyset$, e quindi per la 2 esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $|X \cap B_n| \leq 1$. Allora $f_{|X}$ è chiaramente iniettiva.

4. $(3 \Rightarrow 2)$ Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partizione propria di $\mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $A_n \notin \mathcal{U}$. Definiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) = n \iff x \in A_n$. Per ipotesi, esiste $Y \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|Y}$ sia costante oppure iniettiva. Ma $f_{|Y}$ non può essere costante, perchè se lo fosse allora dovrebbe essere $Y \subseteq A_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, e quindi $A_n \in \mathcal{U}$, assurdo: ne consegue che $f_{|Y}$ è iniettiva, e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|Y \cap A_n| \leq 1$. Allora possiamo estendere Y ad un $X \in \mathcal{U}$ (perchè $Y \in \mathcal{U}$) tale che $|X \cap A_n| = 1$ per *ogni* $n \in \mathbb{N}$, aggiungendo ad Y il minimo di A_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $Y \cap A_n = \emptyset$.

5. $(1 \Rightarrow 4)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e sia $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$. Ci sono due casi possibili:

   (a) $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro principale, diciamo generato da $\{n\}$. Dimostriamo che f è $\mathcal{U}$-equivalente alla mappa costante in n. Dato che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, si ha che per ogni $A \in \mathcal{U}$ si ha $f(A) \in \mathcal{V}$ o equivalentemente $n \in f(A)$. Sia ora $X = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = n\}$. Allora $X \in \mathcal{U}$, in quanto $n \notin f(X^c)$ per definizione di X.

   (b) $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro nonprincipale. Allora, per la 1, si ha $\mathcal{V} \simeq \mathcal{U}$, ossia esiste $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca tale che $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Ora, $g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U})$ e g è iniettiva: ne consegue che $g \equiv_{\mathcal{U}} f$.

6. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Per la 4, esiste $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ costante o biunivoca tale che $f \equiv_{\mathcal{U}} g$, da cui che $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Se la g è costante su n, allora si verifica facilmente che $g_*(\mathcal{U})$ è l'ultrafiltro su $\mathbb{N}$ generato da $\{n\}$, e questo è assurdo in quanto $\mathcal{V}$ è nonprincipale. Ne consegue che g è biunivoca, e quindi $\mathcal{U} \simeq \mathcal{V}$. Dalla generalità di $\mathcal{V}$ si ha la 1.

7. $(5 \Rightarrow 6)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. È sufficiente dimostrare che esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|X}$ è costante oppure non decrescente. Supponiamo che f non sia $\mathcal{U}$-equivalente ad una costante: allora $[f] \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Consideriamo

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \frac{1}{f(n)} : \end{aligned}$$

   allora $[g] = [f]^{-1}$ e quindi $[g] \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo. Per la 5, esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona infinitesima tale che $[h] = [g]$, e quindi $X = \{n \in \mathbb{N} : h(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Ora, in X la h è positiva, monotona e infinitesima: ne consegue che deve essere decrescente. Questo implica che la f ristretta a X è crescente: infatti, se $x_1 < x_2 \in X$, allora $h(x_1) \geq h(x_2)$, ossia $\frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$, da cui $f(x_1) \leq f(x_2)$.

8. $(6 \Rightarrow 5)$ Sia $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimo, diciamo $\xi = [g]$ dove $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se $\xi = 0$, allora g deve essere $\mathcal{U}$-equivalente alla successione di tutti 0. Supponiamo quindi WLOG $\xi > 0$. Allora $g > 0$ in un insieme $\mathcal{U}$-grande. Definiamo ora

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} m & \frac{1}{m+n+1} \leq |g(n)| < \frac{1}{m+n} \\ 1 & g(n) = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

   Per la 6, esiste $H \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|H}$ sia nondecrescente, e per quanto detto prima possiamo supporre WLOG che in H la g sia positiva. Pertanto, ponendo $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < \cdots\}$, abbiamo che $\forall i \in \mathbb{N}$ si ha $f(h_i) \leq f(h_{i+1})$, $h_{i+1} \geq h_i + 1$ e $\frac{1}{f(h_i)+h_i+1} \leq g(h_i) < \frac{1}{f(h_i)+h_i}$, da cui

$$\begin{aligned} g(h_{i+1}) &< \frac{1}{f(h_{i+1}) + h_{i+1}} \\ &\leq \frac{1}{f(h_{i+1}) + h_i + 1} \\ &\leq \frac{1}{f(h_i) + h_i + 1} \\ &\leq g(h_i) \end{aligned}$$

e quindi $g(h_{i+1}) < g(h_i)$: ne consegue che g è strettamente decrescente su H. La g deve anche essere infinitesima su H, perchè se per assurdo avessimo $g > \frac{1}{n}$ su H per un certo $n \in \mathbb{N}$, allora avremmo che $\left\{m \in \mathbb{N} : |g(m)| \leq \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{U}$ perchè ξ è infinitesimo, e inoltre $\left\{m \in \mathbb{N} : |g(m)| > \frac{1}{n}\right\} \supseteq H \in \mathcal{U}$, assurdo.

9. $(6 \Rightarrow 2)$ Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partizione propria di $\mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $A_n \notin \mathcal{U}$. Definiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) = n \iff x \in A_n$. Per la 6, esiste $B \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|B}$ sia nondecrescente. Definiamo $B_n = A_n \cap B$: allora $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione di B tale che $(\forall n \in \mathbb{N})\, B_n < B_{n+1}$ (ossia se $x \in B_n$ e $y \in B_{n+1}$ allora $x < y$): infatti, se per assurdo esistessero $x \in B_n, y \in B_{n+1}$ tali che $x \geq y$, essendo $f_{|B}$ non decrescente dovrebbe essere $n = f(x) \geq f(y) = n + 1$, assurdo. Osserviamo adesso che $B_n \neq \emptyset$ per infiniti n: infatti, se così non fosse, essendo $B \in \mathcal{U}$ dovremmo avere $B_n \in \mathcal{U}$ per un certo n, assurdo in quanto $B_n \subseteq A_n \notin \mathcal{U}$. Allora ogni B_n è superiormente limitato dal minimo di B_{n+1}, e quindi ogni B_n è finito, diciamo $B_n = \{b_{n,1}, ..., b_{n,k_n}\}$. Definiamo ora $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(x) = 1$ se $x \notin B$, mentre $g(b_{n,s}) = b_{n,k_n-s+1}$ (in pratica la g ristretta a B_n inverte l'ordine). Per la 6, esiste $Y \in \mathcal{U}$ tale che $g_{|Y}$ sia nondecrescente. Allora deve essere $|Y \cap B_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che $X = Y \cap B \in \mathcal{U}$, abbiamo che $X \cap A_n = Y \cap B \cap A_n = Y \cap B_n$, e quindi $|X \cap A_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ottenere l'insieme selettivo desiderato, basta estendere eventualmente X aggiungendo un punto di A_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $X \cap A_n = \emptyset$.

10. $(7 \Rightarrow 6)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. 2-coloriamo $[\mathbb{N}]^2 = B \sqcup N$ nel seguente modo: se $i < j \in \mathbb{N}$, allora $\{i, j\} \in B \iff f(i) \leq f(j)$. Per 7, esiste $H \in \mathcal{U}$ tale che $[H]^2$ sia monocromatico. Allora, se $[H]^2 \subseteq N$ la f è strettamente decrescente su H, e questo è assurdo in quanto H è infinito. Ne consegue che $[H]^2 \subseteq B$, ossia f è non decrescente su H, e quindi è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nondecrescente.

11. $(2 \Rightarrow 7)$ Diamo per buono il seguente

    Lemma. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selettivo. Se $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ sono elementi di $\mathcal{U}$, allora esiste un $H = \{h_1 < h_2 < \cdots\} \in \mathcal{U}$ tale che $h_1 \in B_1$ e $h_{n+1} \in B_{h_n}$.*

    Fissiamo una r-colorazione di $[\mathbb{N}]^2$: allora essa induce in modo naturale una r-colorazione di $\Delta^+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x < y\right\}$. Si verifica facilmente che $\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$: allora uno degli r colori, diciamo $A \subseteq \Delta^+$, è un elemento di $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Definiamo $\hat{A} = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{U}\}$, dove $A_n = \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in A\}$. Allora, dato che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, abbiamo che $\hat{A} \in \mathcal{U}$ e, per ogni

$a \in \hat{A}$, abbiamo $A_a \in \mathcal{U}$. Fissiamo $\hat{A} = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ e poniamo

$$B_n = \hat{A} \cap \bigcap_{k \in \hat{A} \cap [1,n]} A_k.$$

Chiaramente ogni B_n sta in $\mathcal{U}$ perchè intersezione finita di elementi di $\mathcal{U}$: inoltre, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$. Applicando il lemma precedente, esiste un $H = \{h_1 < h_2 < \cdots\} \in \mathcal{U}$ tale che $h_1 \in B_1$ e $h_{n+1} \in B_{h_n}$. Allora $[H]^2 \equiv \{(h,h') \in H^2 : h < h'\}$ è interamente contenuto in A, e quindi è monocromatico. Infatti, se prendiamo $h_i < h_j$, allora $h_i \leq h_{j-1}$ e quindi $h_j \in B_{h_{j-1}} \subseteq B_{h_i} \subseteq A_{h_i}$, da cui che $(h_i, h_j) \in A$.

□

Esercizio 10.3. Indichiamo con $\mathcal{U}_i$ l'ultrafiltro principale generato da i.

1. Gli insiemi $\mathcal{O}_A$ sono tutti e soli i clopen di βI.
2. Sia U aperto di βI. Se $A = \{i \in I : \mathcal{U}_i \in U\} = U \cap I$, allora $\overline{U} = \mathcal{O}_A$.
3. Se U è un intorno di $\mathcal{U}$, allora $\{i \in I : \mathcal{U}_i \in U\} = U \cap I \in \mathcal{U}$.

Dimostrazione.

1. Abbiamo visto a lezione che gli $\mathcal{O}_A$ sono clopen. Sia ora C un clopen. Allora $C = \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_{A_j}$. Dato che C è un chiuso di un compatto, C è compatto, e quindi dal ricoprimento aperto dato dagli $\mathcal{O}_{A_j}$ può essere estratto un sottoricoprimento finito: ne consegue che $C = \mathcal{O}_{A_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{A_k} = \mathcal{O}_{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$.
2. Sia $U = \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_{A_j}$. Osserviamo allora che $\forall i \in A_j$ abbiamo $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}_{A_j} \subseteq U$, e quindi $A_j \subseteq A$. Ne consegue che $\mathcal{O}_{A_j} \subseteq \mathcal{O}_A$ per ogni $j \in J$, e quindi, essendo $\mathcal{O}_A$ chiuso, $\overline{U} \subseteq \mathcal{O}_A$. Viceversa, se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A \backslash U$, allora $\mathcal{U}$ è di frontiera per U. Infatti, se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$ per un certo B, allora $B \in \mathcal{U}$ da cui $B \cap A \in \mathcal{U}$ e quindi esiste $i \in B \cap A$: allora $\mathcal{U}_i \in U \cap \mathcal{O}_B$ per definizione di A e per il fatto che $B \in \mathcal{U}_i$.
3. Se U è un intorno di $\mathcal{U}$, allora esiste V aperto tale che $\mathcal{U} \in V \subseteq U$. Allora, dal punto precedente, abbiamo $\mathcal{U} \in V \subseteq \overline{V} = \mathcal{O}_{V \cap I} \subseteq \mathcal{O}_{U \cap I}$ e quindi $U \cap I \in \mathcal{U}$.

□

Esercizio 10.4. Sia I un insieme infinito. Se $A \subseteq I$, allora la chiusura topologica di A in βI è $\mathcal{O}_A$.

Dimostrazione. Ricordiamo che A, visto come sottospazio di βI, è l'insieme degli ultrafiltri principali generati da un elemento di A. Innanzitutto $A \subseteq \mathcal{O}_A$: infatti, se $\mathcal{U}$ è generato da $\{a\}$ per un certo $a \in A$, allora $A \in \mathcal{U}$ da cui che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$. Dato che $\mathcal{O}_A$ è chiuso, si ha $\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A$. Viceversa, dimostriamo che ogni elemento di $\mathcal{O}_A$ è di accumulazione per A, ossia che se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ allora per ogni $\mathcal{O}_B$ tale che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$ si ha che $\mathcal{O}_B \cap A \neq \emptyset$. Se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$, allora $B \in \mathcal{U}$, e quindi dato che $A \in \mathcal{U}$ si ha anche $A \cap B \in \mathcal{U}$, da cui che $A \cap B$ è non vuoto: allora, preso $\mathcal{V}$ principale generato da un elemento di $A \cap B$, abbiamo che $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_B \cap A$. □

Esercizio 10.5. Sia $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione somma, e siano $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Dimostrare che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$.

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Dobbiamo dimostrare che $S^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Si ha

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \iff \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U};$$

ora, dato che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, si ha che $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$; osserviamo ora che $A - n \subseteq \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\}$: infatti, se $m \in A - n$, allora $m = a - n$ per un certo $a \in A$, e quindi $n + m \in A$. Dunque si ha che $A - n \in \mathcal{V} \Rightarrow \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in \mathcal{V}$, e quindi dato che $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, abbiamo che $\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ ossia $S^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Per la generalità di A, questo prova che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \subseteq S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$. Dato che entrambi sono ultrafiltri su $\mathbb{N}$, vale l'uguaglianza. $\square$