Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 13-14/4/15

Esercizio 0.1. *Sono equivalenti:*

- *(i) $\mathcal{U}$ è un P-point in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.*
- *(ii) Per ogni partizione numerabile di $\mathbb{N}$ in $A_1, A_2, \ldots$ co $A_i \notin \mathcal{U}$ esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap A_i$ è finito per ogni i.*
- *(iii) Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante o ad una con controimmagini dei singoletti finite.*
- *(iv) In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ per ogni ϵ infinitesimo esiste una successione infinitesima σ $\mathcal{U}$-equivalente a ϵ.*

Dimostrazione. Osservazione preliminare: $\mathcal{U}$ P-point in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ è equivalente a dire che per ogni O_{A_i} con $A_i \in \mathcal{U}$ $(i \in \mathbb{N})$ esiste un $B \in \mathcal{U}$ tale che $O_B \subseteq \bigcap O_{A_i} \cup \mathbb{N}$, cioè che per ogni i vale $O_B \subseteq O_{A_i} \cup \mathbb{N}$, cioè che per ogni i l'insieme $B \setminus A_i$ è finito.

- ((ii)$\Rightarrow$(iii)) Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, partiziono $\mathbb{N}$ in $C_i := f^{-1}(i)$: se un C_i appartiene ad $\mathcal{U}$, allora f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante; altrimenti esiste $X \in \mathcal{U}$ che interseca ogni C_i in un insieme finito: definisco $g(x) = f(x)$ se $x \in X$ (così $f \equiv_{\mathcal{U}} g$) e sul minimo di quelli che restano la definisco uguale ad 1, sul secondo più piccolo la definisco uguale a 2, e così via (cosicchè assuma ogni valore un numero finito di volte).

- ((iii)$\Rightarrow$(ii)) Data una partizione $\mathbb{N} = \bigsqcup_i C_i$ con $C_i \notin \mathcal{U}$, considero la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che manda ogni elemento di C_i in i: tale f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione g con controimmagine di ogni singoletto finita (f non può essere $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante). Sia $X \in \mathcal{U}$ l'insieme in cui f e g coincidono: tale X è l'insieme cercato: infatti $X \cap C_i$ è finito per ogni i (per come è definito X).

- ((i)$\Rightarrow$(ii)) Data una partizione $\mathbb{N} = \bigsqcup_i C_i$ con $C_i \notin \mathcal{U}$, pongo $A_n := (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)^c \in \mathcal{U}$: per ipotesi (e per l'osservazione preliminare) esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che per ogni n vale $X \setminus A_n$ finito, cioè $X \cap A_n^c$ finito, cioè $X \cap (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)$ finito, da cui $X \cap C_n$ finito, che è la tesi.

- ((ii)$\Rightarrow$(i)) Dati $A_i \in \mathcal{U}$ voglio trovare $B \in \mathcal{U}$ con $B \setminus A_i$ finito per ogni i: considero la partizione $\mathbb{N} = \bigsqcup C_i$ con $C_i := A_i^c \cap A_{i-1} \cap A_{i-2} \cap \ldots \cap A_1$. É semplice verificare per induzione che $A_i^c \subseteq C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_i$.Per ipotesi esiste $B \in \mathcal{U}$ che interseca ogni C_i in un insieme finito: ma allora interseca anche $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_i$ in un insieme finito per ogni i, quindi interseca anche A_i^c in un insieme finito per ogni i, che è la tesi.

- ((iv)$\Rightarrow$(iii)) Data una funzione f non $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante, si ha che $\frac{1}{f}$ è infinitesimo in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, quindi è $\mathcal{U}$-equivalente a σ successione infinitesima, cioè tale che per ogni n l'insieme $\{i : \sigma_i \geq \frac{1}{n}\} = \{i : \frac{1}{\sigma_i} \leq n\}$ è finito; inoltre f è $\mathcal{U}$-equivalente a $\frac{1}{\sigma}$, e $\frac{1}{\sigma}$ assume ogni valore un numero finito di volte, da cui la tesi.

- ((iii)$\Rightarrow$(iv)) Dato un ϵ infinitesimo in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, per ogni n vale $\{i : \frac{1}{n+1} > \epsilon_i \geq \frac{1}{n}\} \notin \mathcal{U}$: quindi la funzione $[\frac{1}{\epsilon}]$ non è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante (le quadre indicano la parte intera), quindi è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione g con controimmagine dei singoletti finita. Pongo $\sigma_i = \epsilon_i$ sugli i in cui $g(i) = \frac{1}{\epsilon_i}$ e σ_i pari ad una qualunque successione infinitesima sugli altri indici.

$\square$

Definizione 0.1. *$\mathcal{F}$ si dice PR (Partition Regular) se per ogni partizione finita di ogni suo elemento, c'è una parte che sta in $\mathcal{F}$.*

Definizione 0.2. *Data una famiglia $\mathcal{F}$ si definisce $\mathcal{F}^*$ come la famiglia di tutti i sottoinsiemi che intersecano tutti gli elementi di $\mathcal{F}$.*

Esercizio 0.2. *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia PR allora $\mathcal{F}^*$ è un filtro.*

Dimostrazione. Chiaramente $\mathcal{F}^*$ contiene tutto l'insieme, non contiene $\emptyset$ ed è stabile per passaggio a sovrainsieme. Bisogna verificare che l'intersezione di due elementi in $\mathcal{F}^*$ sta ancora in $\mathcal{F}^*$: dato $F \in \mathcal{F}$ e $A, B \in \mathcal{F}^*$, partiziono $F = (F \cap A \cap B) \sqcup (F \cap A^c \cap B) \sqcup (F \cap A \cap B^c) \sqcup (F \cap A^c \cap B^c)$: nessuna delle ultime tre parti può contenere un elemento di $\mathcal{F}$ (perchè $A, B \in \mathcal{F}^*$), quindi la prima parte deve contenere un elemento di $\mathcal{F}$, quindi in particolare vale $F \cap A \cap B \neq \emptyset$ che è la tesi. $\square$

Lemma 0.1. *Definisco $T_{A,\mathcal{F}} := \{n : A - n \in \mathcal{F}\}$; valgono le seguenti:*

- $[X \subseteq Y] \Rightarrow [T_{X,\mathcal{F}} \subseteq T_{Y,\mathcal{F}}]$
- $T_{X\cup Y,\mathcal{F}} \supseteq T_{X,\mathcal{F}} \cup T_{Y,\mathcal{F}}$
- $T_{X\cap Y,\mathcal{F}} = T_{X,\mathcal{F}} \cap T_{Y,\mathcal{F}}$
- $T_{X^c,\mathcal{F}} \subseteq T^c_{X,\mathcal{F}}$

Definizione 0.3. *Dati due filtri $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ si definisce il filtro $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ ponendo $A \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ se e solo se $T_{A,\mathcal{G}} \in \mathcal{F}$ (è facile verificare che effettivamente è un filtro).*

Definizione 0.4. *Un filtro $\mathcal{F}$ si dice additivo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ vale $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{U}$.*

Esercizio 0.3. *Valgono (dato $\mathcal{F}$ filtro)*

- *se $\mathcal{U}$ ultrafiltro e $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{U}$ con $\mathcal{W}$ ultrafiltro, allora esiste un ultrafiltro $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{F}$ con $\mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.*

- *$\mathcal{F}$ additivo se e solo se per ogni $\mathcal{U}, \mathcal{V} \supseteq \mathcal{F}$ ultrafiltri vale $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$.*

- *se $\mathcal{F}$ è additivo massimale per inclusione allora $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro idempotente.*

Dimostrazione.

- Se $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{U}$ è un ultrafiltro, allora la famiglia $\mathcal{T} := \mathcal{F} \cup \{T_{A,\mathcal{U}} : A \in \mathcal{W}\}$ ha la FIP: infatti se fosse $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T_{A_i,\mathcal{U}} \cap \bigcap\limits_{j=1}^{m} F_j = \emptyset$ allora si avrebbe $F := \bigcap\limits_{j=1}^{m} F_j \in \mathcal{F}$; $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T_{A_i,\mathcal{U}} = T_{\bigcap A_i,\mathcal{U}} = T_{A,\mathcal{U}}$ (detto $A := \bigcap A_i \in \mathcal{W}$); ma allora $T_{A,\mathcal{U}} \cap F = \emptyset$ da cui $T_{A^c,\mathcal{U}} = T^c_{A,\mathcal{U}} \supseteq F \in \mathcal{F}$ quindi $A^c \in \mathcal{W}$ che è assurdo.

  A questo punto posso estendere la famiglia $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{F}$ ad ultrafiltro $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{F}$ tale che $A \in \mathcal{W} \Rightarrow T_{A,\mathcal{U}} \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$ cioè $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, da cui, essendo entrambi ultrafiltri, $\mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Ora mettiamo in corrispondenza biunivoca i filtri e i chiusi di $\beta\mathbb{N}$: ad un filtro $\mathcal{F}$ associo il chiuso $C_{\mathcal{F}} := \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} O_A$ di $\beta\mathbb{N}$ formato da tutti gli ultrafiltri che estendono $\mathcal{F}$, e ad un chiuso $\bigcap_{i \in I} O_{A_i}$ di $\beta\mathbb{N}$ associo il filtro generato dagli A_i. É semplice verificare che tale corrispondenza è ben definita, che $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ se e solo se $C_{\mathcal{F}} \subseteq C_{\mathcal{G}}$, che se $\mathcal{U}$ ultrafiltro allora $C_{\mathcal{U}} = \{\mathcal{U}\}$. Inoltre abbiamo appena mostrato che $C_{\mathcal{F} \oplus \mathcal{U}} = C_{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{U}$ (e come corollario abbiamo che $\varphi_{\mathcal{U}}$ che manda $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ è un'applicazione chiusa).

- Usando quanto detto in precedenza, si ha che $\mathcal{F}$ additivo $\Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ vale $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ vale $C_{\mathcal{F}} \subseteq C_{\mathcal{F} \oplus \mathcal{U}}$ $\Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ vale $C_{\mathcal{F}} \subseteq C_{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ per ogni $\mathcal{U}, \mathcal{V} \supseteq \mathcal{F}$ vale $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$.

- Se $\mathcal{F}$ è additivo, allora $C_{\mathcal{F}} \oplus C_{\mathcal{F}} \subseteq C_{\mathcal{F}}$, dunque posso applicare il lemma di Ellis per garantire l'esistenza di un ultrafiltro idempotente $\mathcal{U}$ che estenda $\mathcal{F}$: se $\mathcal{F}$ è anche massimale per inclusione, dato che $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$, si deve avere $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ che è la tesi.

$\square$