Esercizi del corso di "Ultrafiltri e metodi non standard"

Giada Franz

28 aprile 2015

1 Pre-ordine di immergibilità finita

Definizione 1.1. Dati A, B sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, diciamo che $A \leq_{fe} B$, cioè A è finitamente immergibile in B, se per ogni $F \subseteq A$ finito, esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq B$.

Nota 1.2. È molto facile osservare che la relazione di immergibilità finita è transitiva. Infatti se $A \leq_{fe} B$ e $B \leq_{fe} C$, per ogni $F \subseteq A$ finito esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq B$ e, poiché $F + x$ è a sua volta finito, esiste $y \in \mathbb{N}$ tale che $F + x + y \subseteq C$. Da questo otteniamo ovviamente che $A \leq_{fe} C$.

Dimostriamo ora alcune proprietà del pre-ordine di immergibilità finita.

Proposizione 1.3. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, vale che $A \geq_{fe} B$ per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$ se e solo se A è spesso.*

Dimostrazione. Se vale che $A \geq_{fe} B$ per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$, in particolare $A \geq_{fe} \mathbb{N}$. Consideriamo quindi il sottoinsieme finito dei naturali $F_n = \{1, \dots, n\}$. Per ipotesi esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F_n + x \subseteq A$, quindi A contiene intervalli arbitrariamente lunghi e di conseguenza A è spesso.

Dimostriamo ora la freccia opposta. Siano A spesso e B un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e consideriamo $F \subseteq B$ un sottoinsieme finito di B. Chiamiamo m ed M rispettivamente il minimo e il massimo dell'insieme F. Poiché A è spesso, esiste un intervallo con $M - m + 1$ elementi contenuto tutto in A; perciò esiste x tale che $[m, M] + x \subseteq A$, ma questo implica ovviamente che $F + x \subseteq A$, da cui la tesi. □

Definizione 1.4. Diciamo che $A \subseteq \mathbb{N}$ è *AP-rich* se contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.

Proposizione 1.5. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è AP-rich e $A \leq_{fe} B$, allora B è AP-rich.*

Dimostrazione. Per definizione di *AP-rich*, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una progressione aritmetica F lunga n contenuta in A. Per ipotesi esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F+x \subseteq B$; ma $F+x$ è ancora una progressione aritmetica lunga n, perciò anche B contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe e di conseguenza è *AP-rich*. □

Proposizione 1.6. *Se $A \leq_{fe} B$, allora $BD(A) \leq BD(B)$.*

Dimostrazione. Dato $n \in \mathbb{N}$, sia $\bar{x} \in \mathbb{Z}$ che realizza $\max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$. Per ipotesi esiste $y \in \mathbb{N}$ tale che $A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n] + y \subseteq B$, poiché $A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n]$ è un sottoinsieme finito di A. Di conseguenza vale che $A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n] + y \subseteq B \cap [\bar{x}+y+1, \bar{x}+y+n]$, da cui otteniamo che

$$\max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} = \frac{|A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n] + y|}{n} \leq \\ \leq \frac{|B \cap [\bar{x}+y+1, \bar{x}+y+n]|}{n} \leq \max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|B \cap [x+1, x+n]|}{n},$$

da cui segue molto facilmente che $BD(A) \leq BD(B)$, poiché

$$BD(A) = \lim_{n \to \infty} \max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|B \cap [x+1, x+n]|}{n} = BD(B).$$

□

Nota 1.7. Non vale invece che se $A \leq_{fe} B$, allora $\bar{d}(A) \leq \bar{d}(B)$.

Dimostrazione. Poniamo $B = \cup_{n\in\mathbb{N}}[2^n + 2^{n-1} + 1, 2^{n+1}]$ e $A = \mathbb{N}$. Allora B è ovviamente spesso perché contiene intervalli arbitrariamente lunghi e inoltre $\bar{d}(B) = \frac{1}{2}$ facilmente. Per la Proposizione 1.3 vale che $A \leq_{fe} B$, però si ha che $\bar{d}(A) = 1 > \frac{1}{2} = \bar{d}(B)$. ☐

Lemma 1.8 (König)**.** *Un albero radicato con un numero infinito di vertici tale che ogni vertice ha un numero finito di figli, ammette un cammino infinito che parte dalla radice e che da un nodo si muove in un suo figlio.*

Proposizione 1.9. *Si ha che $B \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se e solo se esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.*

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni. Innanzitutto prendiamo B sindetico a tratti e dimostriamo che esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.

Poiché B è sindetico a tratti, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che B ha buchi al più grandi k su un insieme spesso. Consideriamo ora un albero tale che ogni suo nodo rappresenta un insieme $F \subseteq \mathbb{N}$ con $F \subseteq [1, n]$ per qualche n, F sindetico su quell'intervallo con buchi grandi al più k e $F + x \subseteq B$ per qualche $x \in \mathbb{N}$. Inoltre poniamo alla radice di questo albero $F = \emptyset$ e imponiamo che F_1 è padre di F_2 se e solo se $F_1 \subset F_2$ e $|F_2| = |F_1| + 1$. Diciamo inoltre per semplicità che non ci possono essere due nodi che rappresentano lo stesso insieme.

Notiamo che possiamo rappresentare nell'albero ogni insieme $F \subseteq [1, n]$ che è sindetico con buchi al più grandi k e tale che $F + x \subseteq B$ per qualche $x \in \mathbb{N}$. Infatti ogni prefisso di tale F rispetta le ipotesi e perciò esiste una catena $\emptyset \subset F_1 \subset \ldots \subset F_s \subset F$, in cui la cardinalità cresce ad ogni passaggio di 1.

Inoltre esistono F di cardinalità arbitrariamente grande che rispettano queste ipotesi, poiché B è sindetico a tratti; di conseguenza l'albero avrà infiniti nodi.

Infine ogni nodo avrà un numero finito di figli in quanto se consideriamo F che rispetta le ipotesi, allora abbiamo solo $k + 1$ possibili scelte di un $G \supset F$ tale che rispetta a sua volta le ipotesi e tale che $|G| = |F| + 1$.

Possiamo perciò applicare il Lemma 1.8 (König) a questo albero e otteniamo una catena infinita $\emptyset \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots$; consideriamo quindi $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Vale facilmente che A è sindetico perché ovviamente $A \cap [1, m]$ è sindetico con buchi al più grandi k per ogni m. Inoltre dato $F \subseteq A$ finito, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $F \subseteq F_n$; allora per le proprietà degli F_n esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq F_n + x \subseteq B$, da cui $A \leq_{fe} B$.

Dimostriamo ora l'implicazione opposta. Supponiamo che esista $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$. Chiamiamo $\mathcal{F} = \{F \subseteq A \mid |F| < \infty\}$.

Poiché $A \leq_{fe} B$, per ogni $F \in \mathcal{F}$ esiste $x_F \in \mathbb{N}$ tale che $F + x_F \subseteq B$. Perciò in particolare $S = \bigcup_{F\in\mathcal{F}}(F + x_F) \subseteq B$. Consideriamo ora $T = \bigcup_{F\in\mathcal{F}}([\min F, \max F] + x_F)$. Vale facilmente che B è sindetico su T, perché $S \subseteq B \cap T$. Inoltre T è spesso per la Proposizione 1.3, in quanto $\mathbb{N} \leq_{fe} T$, poiché gli F in $\mathcal{F}$ sono arbitrariamente grandi. Questo ci dice proprio che B è sindetico a tratti, in quanto sindetico sull'insieme spesso T. ☐

Corollario 1.10. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti e $A \leq_{fe} B$, allora B è sindetico a tratti.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.9, esiste $C \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $C \leq_{fe} A$, ma allora per la Nota 1.2 abbiamo che $C \leq_{fe} B$, da cui B è sindetico a tratti sfruttando nuovamente la Proposizione 1.9. ☐

Nota 1.11. Notare che il corollario precendente non varrebbe se al posto di sindetici a tratti parlassimo di sindetici.

Dimostrazione. Sia A un insieme sindetico qualunque e sia B un insieme spesso non sindetico (per esempio l'insieme spesso utilizzato nella dimostrazione della Nota 1.7, che non contiene intervalli arbitrariamente lunghi). Risulta ovvio che questi due insiemi ci forniscono il controesempio desiderato in quanto $A \leq_{fe} B$ per la Proposizione 1.3. ☐