Esercizi lezione 30/3/15, Andrea Vaccaro

19 aprile 2015

Proposizione 0.1. *L'ordine $\leq_{RK}$ non ha elementi massimali.*

Dimostrazione. Mostreremo che dato U non principale, vale $U \leq_{RK} U \otimes U$, ma $U \otimes U \not\leq_{RK} U$. Sia allora U non principale su $\mathbb{N}$ e consideriamo la proiezione $\pi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; vale che $\pi_1(U \otimes U) = U$. Infatti $A \in \pi_1(U \otimes U) \iff \pi_1^{-1}(A) \in U \otimes U \iff B = \left\{i \in \mathbb{N} : \pi_{1,i}^{-1}(A) \in U\right\} \in U$. Notando che $\pi_1^{-1}(A) = A \times \mathbb{N}$, si vede che per $i \in A$ allora $\pi_{1,i}^{-1}(A) = \mathbb{N} \in U$, per $i \notin A$ vale $\pi_{1,i}^{-1}(A) = \emptyset \notin U$, cioè $B = A$, da cui segue la tesi.

Supponiamo valga $U \otimes U \leq_{RK} U$ tramite una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si ha allora che esiste $A \in U$ tale per cui $\pi_1 \circ f$ ristretta a tale insieme coincida con $id_{\mathbb{N}}$ (esercizio vecchio); si ha dunque $f(U) = U \otimes U$. Ma allora $f(A) \in U \otimes U$, cioè $\{n \in \mathbb{N} : f(A)_n \in U\} \in U$; accade però che ogni fibra $f(A)_n$ può contenere al massimo un punto, poiché π_1 manda tutta la fibra nello stesso punto. Quindi $f(A)$ non può stare in $U \otimes U$ poiché U è non principale, e ciò è assurdo.

A questo punto, sia h una bigezione da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, e consideriamo l'ultrafiltro $V = h(U \otimes U)$ isomorfo a $U \otimes U$. Vale allora che $U \leq_{RK} V$, ma $V \not\leq_{RK} U$. $\square$

Proposizione 0.2. *Se* $A \subseteq \mathbb{N}$*, allora* $\overline{A} = \mathcal{O}_A$*.*

Dimostrazione. Un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ può essere visto in $St(\mathbb{N})$ come l'insieme degli ultrafiltri principali degli elementi in A. Dopo questa precisazione, $A \subseteq \mathcal{O}_A$ vale poiché ogni ultrafiltro principale U_n con $n \in A$ ha A come elemento. Se poi consideriamo un chiuso di base $\mathcal{O}_B$ in $St(\mathbb{N})$ contenente A, si ha che per ogni $n \in A$, allora $B \in U_n$. Supponiamo esista $U \in \mathcal{O}_A \setminus \mathcal{O}_B$, perciò $A \in U$ e $B^c \in U$. Dato però $n \in A$, vale che $n \notin B^c$, poiché $B^c \notin U_n$, perciò $A \cap B^c = \emptyset$, il che è assurdo. $\square$

Proposizione 0.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Verificare che la compattificazione di Stone-Chech è unica a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia βX e Y un compatto di Hausdorff tale per cui $\overline{X} = Y$ e per cui valga che per ogni $f : X \to K$ continua e K compatto di Hausdorff, esiste ed è unica $\overline{f} : Y \to K$ estensione di f continua.

Considero $i_1 : X \to \beta X$ e $i_2 : X \to Y$ immersioni continue. Per unicità, i_1 può essere estesa a βX solo tramite l'identità, e chiamiamo $\overline{i_1}$ l'estensione di i_1 a Y, e $\overline{i_2}$ l'estensione di i_2 a βX. Si verifca che $\overline{i_1} \circ \overline{i_2}$ ristretta ad X è uguale a i_1, perciò per unicità dell'estensione, deve essere l'identità. In modo analogo si vede che $\overline{i_2} \circ \overline{i_1} = id_Y$, e segue la tesi.

□

Proposizione 0.4. *Verificare le seguenti:*

i) *C è clopen se e solo se $C = \mathcal{O}_A$ per un certo $A \subseteq \mathbb{N}$*

ii) *Se $A \subseteq \beta\mathbb{N}$ è aperto, allora $\overline{A} = \mathcal{O}_{A\cap\mathbb{N}}$*

iii) *Se A è un intorno di U, allora $A \cap \mathbb{N} \in U$*

Dimostrazione. i).

La direzione $\Leftarrow$ è ovvia per definizione. Viceversa se C è clopen, questo è unione di aperti poiché aperto $C = \bigcup \mathcal{O}_{A_i}$, e poiché chiuso è compatto, quindi ammette sottoricoprimento finito di tale unione, cioè $C = \mathcal{O}_{A_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{A_n} = \mathcal{O}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}$, dunque segue la tesi.

ii).

Sia $A = \bigcup \mathcal{O}_{A_i}$; $A \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : U_n \in A\}$ è $\bigcup A_i$: se infatti $U_n \in A$, allora $U_n \in \mathcal{O}_{A_i}$ per un certo i, e quindi $n \in A_i$; viceversa, preso $n \in A_i$, vale $U_n \in \mathcal{O}_{A_i} \subseteq \bigcup \mathcal{O}_{A_i}$.

Se $U \in A$, allora esiste i per cui $U \in \mathcal{O}_{A_i}$; poiché vale $A_i \subseteq A \cap \mathbb{N}$, segue $A \subseteq \mathcal{O}_{A\cap\mathbb{N}}$.

Sia invece $\mathcal{O}_B$ un chiuso contenente A, il che significa per un ultrafiltro U qualunque, che se esiste $A_i \in U$, allora $B \in U$. Se $U \in \mathcal{O}_{A\cap\mathbb{N}} = \mathcal{O}_{\bigcup A_i}$ che però essendo chiuso (dunque compatto) è anche uguale a $\mathcal{O}_{\bigcup_{j\in J} A_j}$ con J finito, e quindi $\bigcup A_j \in U$, quindi $A_j \in U$ per un certo $j \in J$, allora $B \in U$, e $U \in \mathcal{O}_B$, e segue la tesi.

iii).

Per regolarità di $St(\mathbb{N})$ (che segue dal fatto che tale spazio è Hausdorff e compatto), esiste un aperto $B \subseteq A$ contenente U tale che $\overline{B} \subseteq A$. Per il punto precedente $U \in \overline{B} = \mathcal{O}_{B\cap\mathbb{N}}$, ergo $B \cap \mathbb{N} \in U$, e poiché $B \cap \mathbb{N} \subseteq A \cap \mathbb{N}$, anche quest'ultimo è in U. $\square$

Proposizione 0.5. *Sia* $\{\mathcal{O}_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ *una famiglia numerabile di intorni di* U *non principale, allora esiste* $B \subseteq \mathbb{N}$ *infinito tale che* $\mathcal{O}_B \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n}$ *relativamente a* $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Abbiamo una famiglia di insiemi $A_i \in U$ tutti infiniti, poiché U non principale. Costruiamo B per passi: sia $b_1 \in A_1$, poi consideriamo $b_2 \in A_1 \cap A_2$ diverso da b_1 (scelta possibile poiché $A_1 \cap A_2 \in U$ dunque infinito) e così via più in generale $b_k \in A_1 \cap \cdots \cap A_k$ diverso da b_j con $j < k$. Sia ora V non principale tale che $B \in V$. Per ogni n si ha che B interseca A_n^c in al più $n-1$ punti (ovvero da b_1 a b_{n-1}), che quindi è finito e non può stare in V. Ergo $A_n \in V$ per ogni n. $\square$

Proposizione 0.6. *Sia* $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la funzione somma. Allora* $U \oplus V = S(U \otimes V)$.

Dimostrazione. $A \in S(U \otimes V) \iff S^{-1}(A) \in U \otimes V \iff \big\{n : S^{-1}(A)_n \in V\big\} \in U$ dove $S^{-1}(A)_n = \{j : j + n \in A\} = A - n$, e dunque segue la tesi per la definizione di $U \oplus V$. $\square$