13 aprile

Esercizio

A è spesso sse è $\leq_{fe}$-massimale

Soluzione

$\Rightarrow$ Sia $B \subseteq \mathbb{Z}$. Vediamo che $B \leq_{fe} A$. Sia $F \subseteq B$ finito con $|F| = n$. Sia $x_0 \in A$ tale che $[x_0, x_0+n) \subseteq A$ (esiste perché A è spesso). Allora $x_0 + F \subseteq [x_0, x_0+n) \subseteq A$.

$\Leftarrow$ Sia A $\leq_{fe}$-massimale. Allora $\mathbb{N} \leq_{fe} A$, cioè $\forall F \subseteq \mathbb{N}$ finito, $\exists x$ $x + F \subseteq A$. In particolare, $\forall n$ $\exists x_0$ $[0, n) + x_0 = [x_0, x_0+n) \subseteq A$, ovvero A è spesso.

Esercizio

Se A è AP-rich e $A \leq_{fe} B$ allora B è AP-rich.

Soluzione

Sia $k > 0$, cerco $x_0 \in B$ e $d > 0$ tali che $\forall n = 1, \dots, k$ $x_0 + nd \in B$. Sia $y_0 \in A$ tale che $\exists \bar{d}$ $\forall n = 1, \dots, k$ $y_0 + n\bar{d} \in A$. Questo esiste per ipotesi. Ora $F = \{y_0 + n\bar{d} \mid n = 1, \dots, k\}$ è un insieme finito di A, quindi $\exists z_0$ t.c. $z_0 + F \subseteq B$. Allora $\{(y_0 + z_0) + n\bar{d} \mid n = 1, \dots, k\}$ è una progressione aritmetica lunga k contenuta in B.

Esercizio

$A \leq_{fe} B \Rightarrow BD(A) \leq BD(B)$

Soluzione

$\forall n$ sia k_n tale che $\frac{|A \cap [k_n, k_n+n)|}{n} = \max_{k \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n)|}{n}$. Allora, poiché $A \cap [k_n, k_n+n)$ è finito e $A \leq_{fe} B$, $\exists x \in \mathbb{N}$ $x + (A \cap [k_n, k_n+n)) \subseteq B$

Da cui $|B \cap [x+k_n, x+k_n+n)| \geq |A \cap [k_n, k_n+n)|$ e quindi

$$\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{|B \cap [k, k+n)|}{n} \geq \frac{|B \cap [x+k_n, x+k_n+n)|}{n} \geq \max_{k \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n)|}{n}$$

Esercizio

Trovare A, B tali che $A \leq_{fe} B$ e $\bar{d}(A) > \bar{d}(B)$

Soluzione

Sia $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^n+1, 2^n+n]$. Allora B è spesso ma $\bar{d}(B) = 0$ (l'ho verificato in un esercizio precedente). Allora, preso un qualunque A con $\bar{d}(A) > 0$ (anche $\mathbb{N}$ stesso) si ha $A \leq_{fe} B$ e $\bar{d}(A) > \bar{d}(B) = 0$.

Esercizio

A sindetico a tratti e $A \leq_{fe} B \Rightarrow B$ sindetico a tratti

Soluzione

Devo trovare k_B tale che $\forall n$ $\exists x_n$ t.c. $B \cap [x_n, x_n+n)$ ha buchi più piccoli di k_B. Sia k_A l'analogo per A, che sappiamo esistere per ipotesi. Allora per n fissato, poiché $A \cap [x_n, x_n+n)$ è finito e $A \leq_{fe} B$, $\exists z$ t.c. $z + (A \cap [x_n, x_n+n)) \subseteq B$. Ma allora $B \cap [z+x_n, z+x_n+n)$ non ha buchi più grandi di $k_A = k_B$.

Esercizio

Trovare A, B tali che A è sindetico, $A \leq_{fe} B$ e B non è sindetico.

Soluzione

Basta prendere, come B, un qualsiasi spesso non sindetico e per A un qualsiasi sindetico. Allora $A \leq_{fe} B$ per $\leq_{fe}$-massimalità degli insiemi spessi. es

$A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \bigcup_{n \geq 1} [n^2-n, n^2-1]$.

Esercizio

B è sindetico a tratti se e solo se $\exists A$ sindetico e $A \leq_{fe} B$.

Soluzione

Sia $B = C \cap D$ con D spesso e C sindetico. Poiché C è sindetico esiste k_C tale che i buchi di C sono più piccoli di k_C. Ora considero A ottenuto da B "limitando i suoi buchi a k_C", ovvero:

sia $B = \{b_1 < b_2 < \dots\}$
sia $d = b_1 - 1 - k_C$ (sottrazione intera)
per $i = 1$ e $i{+}{+}$ fai
    $a_i = b_i - d$
    $d = d + b_{i+1} - b_i - k_C$ (sottrazione intera)

restituisci $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$

Vediamo che A è sindetico (tutti i buchi sono più piccoli di k_C) e, se $F \subseteq A$ è finito allora è un traslato di un pezzo di A per definizione.

Attenzione non torna. F potrebbe prendere e pezzi di A che erano separati da un buco $> k_C$ e ora si trovano a distanza k_C.

$\boxed{\Leftarrow}$

Devo trovare k_B tale che $\forall n\ \exists x_n$ t.c. $B \cap [x_n, x_n+n)$ ha buchi più piccoli di k_B. Sappiamo che esiste k_A tale che ogni buco di A è più piccolo di k_A.

Sia n fissato, sia $F = A \cap [0, n)$. Poiché F è finito $\exists \bar{x}$ tale che $\bar{x} + F \subseteq B$. Allora $B \cap [\bar{x}, \bar{x}+n)$ ha buchi più piccoli di k_A.

Esercizio

TFAE

1) $\mathcal{U}$ è P-point

2) $\forall\, \mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i$ dove $C_i \notin \mathcal{U}\ \forall i$, $\exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $X \cap C_i$ è finito $\forall i$

3) $\forall f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ \ \exists A \in \mathcal{U}$ t.c. $f_{|A}$ costante o finite-to-one

4) $\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$ infinitesimo $\exists \sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitesima t.c. $\varepsilon = [\sigma]_{\mathcal{U}}$

Soluzione

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Per usare la proprietà di P-point, troviamo un intersezione numerabile di intorni di $\mathcal{U}$. So che $C_i \notin \mathcal{U}$ e quindi $C_i^c \in \mathcal{U}$. Allora $\mathcal{U} \in O_{C_i^c}\ \forall i$ e per P-point esiste $X' \subseteq \mathbb{N}$ tale che $O_{X'} \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} O_{C_i^c}$ e $\mathcal{U} \in O_{X'}$. Vediamo che $\forall i\ \ X' \cap C_i$ è vuota o finita. Se esistesse i tale che $X' \cap C_i$ fosse infinita allora esisterebbe almeno un ultrafiltro $\mathcal{V}$ che contiene X' e C_i e che sia non principale. Allora $\mathcal{V} \in O_{X' \cap C_i} = O_{X'} \cap O_{C_i}$ ma allora $\mathcal{V} \in O_{C_i}$ e, poiché $O_{X'} \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} O_{C_i^c}$, $\mathcal{V} \in O_{C_i^c}$. Assurdo.

Ora otteniamo da X' un soprainsieme X tale che $X \cap C_i$ è non vuoto e finito per ogni i: $X = X' \cup \{\min C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Ovviamente $X \in \mathcal{U}$ e, poiché i C_i sono a due a due disgiunti, l'intersezione rimane finita per ogni i.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Considero $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(i)$. Abbiamo due possibilità:

a) esiste $A \in \mathcal{U}$ $\exists i$ tale che $A = f^{-1}(i)$ e quindi f è costante su $A \in \mathcal{U}$

b) $\forall A \in \mathcal{U}\ \forall i\ \ A \neq f^{-1}(i)$ e quindi $f^{-1}(i) \notin \mathcal{U}\ \forall i$. Allora siamo nelle ipotesi di 2) ed esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap f^{-1}(i)$ è finito per ogni i, ovvero $f_{|X}$ è finite-to-one.

Nota

Qui ho un dubbio su 2) e 3): o vale $\mathbb{N} = \bigsqcup C_i$ e per finito si intende "finito e non vuoto" oppure è $\mathbb{N} = \bigcup C_i$ e finito vuol dire "finito o vuoto".

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Se ε è infinitesimo, ovvero $\varepsilon < \frac{1}{n}$ $\forall n$, cioè $\{m \mid \varepsilon[m] < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{U}$ $\forall n$, MANCA

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ MANCA.

Esercizio

Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di insiemi P.R. Allora $\mathcal{B}^*$ è un filtro.

Soluzione

Ci ricordiamo che $\mathcal{B}^* = \{B \mid B \cap F \neq \emptyset \;\; \forall F \in \mathcal{B}\}$.

- $\emptyset \notin \mathcal{B}^*$. Infatti $\emptyset \cap F = \emptyset$ $\forall F \in \mathcal{B}$
- $A \in \mathcal{B}^*$ e $B \supseteq A \rightarrow B \in \mathcal{B}^*$. Infatti $B \cap F \supseteq A \cap F$ $\forall F \in \mathcal{B}$.
- $A, B \in \mathcal{B}^* \rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}^*$. Infatti, $\forall F \in \mathcal{B}$

$$F = (A \cap F) \sqcup (A^c \cap F)$$

Poiché $\mathcal{B}$ è P.R. almeno uno dei due pezzi appartiene a $\mathcal{B}$. Se per assurdo fosse $(A^c \cap F)$, allora $A \in \mathcal{B}^* \rightarrow A \cap (A^c \cap F) \neq \emptyset$. Assurdo. Allora vale $(A \cap F) \in \mathcal{B}$ e, poiché $B \in \mathcal{B}^*$, si ha $B \cap (A \cap F) = (B \cap A) \cap F \neq \emptyset$, $\forall F \in \mathcal{B}$.