Esercizi per il corso "ultrafiltri e metodi non standard"

Marco Usula

Anno accademico 2014/2015

Lezioni 4,5,6

Notazioni Indicherò con ω l'insieme $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, e con $\mathbb{N}$ l'insieme $\omega \setminus \{0\}$.
I simboli $\subset$ e $\supset$ indicano inclusioni *strette* tra insiemi.

4 Esercizi 9-3-2015

Esercizio 4.1. La proprietà "Compattezza Combinatoria 1" (CC1) dice che *se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, allora esiste $Y \subseteq X$ finito tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ sia r-regolare su Y*. La proprietà "Compattezza combinatoria 2" (CC2) dice che *se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, allora esiste $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finito tale che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X*. Dimostrare che CC1 $\iff$ CC2.

Dimostrazione. (CC2$\Rightarrow$CC1) Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, e supponiamo che valga CC2. Allora esiste $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finita tale che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X. Sia Y l'unione degli insiemi di $\mathcal{F}_0$. Allora Y è un'unione finita di insiemi finiti contenuti in X, e quindi Y è un sottoinsieme finito di X. Inoltre, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ ovviamente. Ora, fissiamo una r-colorazione di Y, e estendiamola arbitrariamente ad una r-colorazione di X. Allora esiste un elemento A di $\mathcal{F}_0$ monocromatico rispetto a tale r-colorazione. Ma $A \subseteq Y$, e quindi A è monocromatico anche come sottoinsieme di Y rispetto alla sua r-colorazione iniziale. Dato che $A \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$, abbiamo che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ è r-regolare su Y, e quindi vale CC1.
(CC1$\Rightarrow$CC2) Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, e supponiamo che valga la CC1. Allora esiste $Y \subseteq X$ finito tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ sia r-regolare su Y. Scegliamo ora $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$: la $\mathcal{F}_0$ è finita in quanto $\mathcal{P}(Y)$ è finito, essendo Y finito. Inoltre, fissata una r-colorazione di X, essa induce una r-colorazione su Y: allora, dato che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su Y, esiste un elemento $A \in \mathcal{F}_0$ monocromatico. Ma $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, e se A è monocromatico rispetto alla colorazione indotta, allora è monocromatico anche rispetto alla colorazione originale. Ne consegue che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X, e quindi vale la CC2. $\square$

Esercizio 4.2. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiusa per soprainsiemi.

1. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è wPR su X se e solo se esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$.

2. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è PR se e solo se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X.

Dimostrazione. Ricordiamo le definizioni: una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è wPR su X se e solo se $\mathcal{F}$ è r-regolare su X per ogni $r \in \mathbb{N}$; una famiglia $\mathcal{F}$ è PR se e solo se, per ogni $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è wPR su A. Inoltre, ricordiamo che l'ipotesi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiusa per soprainsiemi implica che $\mathcal{F}$ è wPR su X se e solo se, per ogni $r \in \mathbb{N}$ e per ogni r-colorazione di X, uno degli r colori di X sta in $\mathcal{F}$.

1. Se esiste $\mathcal{U}$ ultrafiltro su X tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}$ è wPR. Infatti, sia $r \in \mathbb{N}$ e sia $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$ una r-colorazione di X: allora, essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X, esiste $i \in \{1, ..., n\}$ tale che $A_i \in \mathcal{U}$, e quindi $A_i \in \mathcal{F}$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{F}$ sia wPR su X. Definiamo

   $$\mathcal{S} = \{S \subseteq X : S^c \notin \mathcal{F}\}.$$

   Osserviamo che $\mathcal{S}$ ha la FIP: infatti, se $S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}$ e per assurdo fosse $S_1 \cap \cdots \cap S_n = \emptyset$, allora $S_1^c \cup \cdots \cup S_n^c = X$, da cui che dovrebbe essere $S_i^c \in \mathcal{F}$ per qualche $i \in \{1, ..., n\}$, il che è assurdo in quanto $S_i \in \mathcal{S}$ e quindi $S_i^c \notin \mathcal{F}$. Dunque esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X che estende $\mathcal{S}$. Mostriamo che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Infatti, se per assurdo esistesse $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$, allora, essendo $A \notin \mathcal{F}$, si avrebbe $A^c \in \mathcal{S}$, da cui $A^c \in \mathcal{U}$, assurdo.

2. Se $\mathcal{F}$ è PR, allora per ogni $A \in \mathcal{F}$ la famiglia $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è wPR su A. Inoltre, essendo $\mathcal{F}$ chiusa per soprainsiemi, si ha che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è chiusa per soprainsiemi rispetto ad A. Allora, per il punto precedente, esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}_A$ su A contenuto in $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$. Definiamo ora $\mathcal{V}_A = \{S \subseteq X : (\exists B \in \mathcal{U}_A)(B \subseteq S)\}$. Dato che $\mathcal{U}_A$ è un filtro su A, abbiamo che $\mathcal{V}_A$ è un filtro su X. Inoltre, se $S \subseteq X$, allora abbiamo che $A = (S \cap A) \sqcup (S^c \cap A)$, e quindi essendo $\mathcal{U}_A$ un ultrafiltro su A uno dei due pezzi deve stare in $\mathcal{U}_A$. Allora, per definizione di $\mathcal{V}_A$, uno tra S e S^c deve stare in $\mathcal{V}_A$, e quindi $\mathcal{V}_A$ è un ultrafiltro su X che contiene A. Ovviamente $\mathcal{V}_A \subseteq \mathcal{F}$, in quanto $\mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ è chiuso per soprainsiemi: allora

   $$\mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{V}_A$$

   e quindi $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X. Viceversa, se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X, sia $A \in \mathcal{F}$ e sia $\mathcal{V}_A$ un ultrafiltro su X tale che $\mathcal{V}_A \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{V}_A$. Allora $\mathcal{U}_A = \mathcal{V}_A \cap \mathcal{P}(A)$ è chiaramente un ultrafiltro su A, $\mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$, e quindi per il punto precedente si ha che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è wPR su A, e quindi, per la generalità di A, si ha che $\mathcal{F}$ è PR.

□

Esercizio 4.3. (Teorema dei tre colori) Sia $f : X \to X$ una funzione senza punti fissi. Dimostrare che la famiglia $\mathcal{F} = \{\{x, f(x)\} : x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *non* è 3-regolare su X, ossia che esiste un modo di 3-colorare X in modo che, per ogni x, x e $f(x)$ abbiano colore diverso.

Dimostrazione. Osserviamo che la tesi equivale al fatto che il grafo Γ su X tale che $\Gamma(x, y)$ se e solo se $f(x) = y$, è 3-colorabile, ossia che X può essere 3-colorato in modo tale che due vertici adiacenti di Γ abbiano colore diverso. Dimostriamo quindi quest'ultima proprietà.
Definiamo una relazione di equivalenza su X in questo modo: $x \sim y$ se e solo se esistono $n, m \in \omega$ tali che $f^n(x) = f^m(y)$ (con $f^0 = \mathrm{id}_X$). Verifichiamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Riflessività e simmetria sono ovvie: per quanto riguarda la transitività, se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora esistono $n, m, p, q \in \omega$ tali che $f^n(x) = f^m(y)$ e $f^p(y) = f^q(z)$. Ora, supponiamo wlog che $m \leq p$. Allora $f^{n+p-m}(x) = f^p(y) = f^q(z)$, e quindi $x \sim z$. Chiamiamo A_x la classe di equivalenza di x

modulo $\sim$. Ora, osserviamo che se $A_x \neq A_y$, allora non esistono $x_0 \in A_x, y_0 \in A_y$ tali che $\Gamma(x_0, y_0)$ o $\Gamma(y_0, x_0)$: infatti, se così fosse, allora si avrebbe $f(x_0) = y_0$ o $f(y_0) = x_0$, e quindi in entrambi i casi $x_0 \sim y_0$, da cui che $A_{x_0} = A_x = A_y = A_{y_0}$, assurdo. Questo implica che possiamo 3-colorare le varie classi di equivalenza indipendentemente l'una dall'altra, e quindi è sufficiente esibire un modo per 3-colorare una generica classe di equivalenza A_x. A tale scopo, definiamo

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \left\{x, f(x), f^2(x), \ldots\right\} \\
A_{n+1} &= f^{-1}(A_n) \cup A_n.
\end{aligned}
$$

Chiaramente $A_n \subseteq A_{n+1}$. Dimostriamo per induzione su n che $f(A_n) \subseteq A_n$ per ogni n. Per $n = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamola vera per n: allora $f(A_{n+1}) = f\left(f^{-1}(A_n) \cup A_n\right) = f\left(f^{-1}(A_n)\right) \cup f(A_n) \subseteq A_n \subseteq A_{n+1}$. Dimostriamo ora che A_x è l'unione degli A_n. Per induzione su n si ha che $A_n \subseteq A_x$. Infatti, $A_0 \subseteq A_x$ ovviamente, in quanto per ogni $k \in \omega$ si ha $f^k(x) \sim x$, e se $A_n \subseteq A_x$, allora se $y \in f^{-1}(A_n)$ allora $f(y) \in A_n$ e quindi $y \sim z$ per un certo $z \in A_n \subseteq A_x$, da cui che $y \sim z \sim x$. Per la generalità di y, si ha $f^{-1}(A_n) \subseteq A_x$ e quindi $A_{n+1} \subseteq A_x$. Viceversa, se $y \in A_x$, allora esistono $n, m \in \omega$ tali che $f^n(y) = f^m(x)$, da cui che $f^n(y) \in A_0$ e quindi $y \in f^{-n}(A_0) \subseteq A_n$, e quindi per la generalità di y si ha che A_x è contenuto nell'unione degli A_n.
Per concludere, 3-coloriamo A_x "induttivamente". Scegliamo una 3-colorazione di A_0 in modo che Γ ristretto ad A_0 sia 3-colorato: questa 3-colorazione di A_0 esiste sempre, in quanto Γ ristretto ad A_0 è o una "semiretta infinita" (e quindi basta usare due colori distinti alternati) oppure è un segmento iniziale finito e un ciclo finito (e quindi basta usare due colori distinti alternati per il segmento iniziale, il terzo colore per il punto in comune tra il segmento e il ciclo, e i due colori di prima alternati per i punti del ciclo). Ora, supponiamo di aver esteso la 3-colorazione di A_0 ad una 3-colorazione di A_n tale che Γ ristretto ad A_n sia un grafo 3-colorato, e mostriamo come estendere tale colorazione ai punti di $A_{n+1} \setminus A_n = f^{-1}(A_n) \setminus A_n$ in modo tale che Γ ristretto a A_{n+1} sia 3-colorato. Sia $y \in f^{-1}(A_n) \setminus A_n$. Allora $f(y) \in A_n$ e quindi sarà colorato con uno dei 3 colori: coloriamo allora y con uno dei due colori diversi dal colore di $f(y)$. Questo basta, in quanto se $y \in f^{-1}(A_n) \setminus A_n$, allora y è adiacente ad un solo vertice di A_{n+1}, ossia a $f(y) \in A_n$: difatti, ci sono solo altri due casi possibili:

1. $y = f(z)$ per un certo $z \in A_n$. Allora $y \in f(A_n) \subseteq A_n$, assurdo.
2. $y = f(y')$ per un certo $y' \in f^{-1}(A_n) \setminus A_n$. Allora $y \in f\left(f^{-1}(A_n)\right) \subseteq A_n$, assurdo.

L'unione delle 3-colorazioni appena definite sugli A_n è la 3-colorazione di A_x che cercavamo.

□

Esercizio 4.4. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato (quindi possiamo immergerci $\mathbb{Q}$). Le seguenti sono equivalenti:

1. $\mathbb{F}$ è archimedeo.
2. $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$.
3. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$.
4. Non esistono infinitesimi diversi da 0.

Dimostrazione. Un campo ordinato $\mathbb{F}$ è archimedeo se per ogni $0 < x < y$ in $\mathbb{F}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$. Inoltre, la topologia su $\mathbb{F}$ indotta dall'ordine è quella una cui base di aperti è data dagli intervalli (a, b).

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia $\mathbb{F}$ archimedeo. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha \in \mathbb{F}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $n < \alpha$. Dato che $\mathbb{F}$ è archimedeo, allora, preso $n \in \mathbb{N}$, dato che $n < \alpha$ deve esistere $m \in \mathbb{N}$ tale che $nm > \alpha$; ma $nm \in \mathbb{N}$, e quindi $nm < \alpha$ per ipotesi su α, assurdo. Ne consegue che $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Sia $\mathbb{N}$ illimitato in $\mathbb{F}$. Per dimostrare che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$ è sufficiente dimostrare che per ogni coppia $a < b$ di elementi di $\mathbb{F}$ esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $a < \lambda < b$. Dato che $b > a$, si ha $b - a \neq 0$. Osserviamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $b - a > \frac{1}{n}$: infatti, se fosse $b - a \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora avremmo $\frac{1}{b-a} \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $\frac{1}{b-a}$ limiterebbe superiormente $\mathbb{N}$, assurdo. Allora $nb - na > 1$. Osserviamo ora che l'insieme $\{m \in \mathbb{N} : m \leq na\}$ è un segmento iniziale di $\mathbb{N}$ diverso da $\mathbb{N}$ stesso (in quanto $\mathbb{N}$ è illimitato), e quindi ammette massimo, diciamo m_0. Allora $na < m_0 + 1 \leq na + 1 < nb$, da cui che $a < \frac{m_0+1}{n} < b$. Ne consegue la tesi.

3. $(3 \Rightarrow 4)$ Sia $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{F}$. Supponiamo per assurdo che esista un infinitesimo $\xi \neq 0$, e supponiamolo WLOG > 0. Dato che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$, esistono $p, q \in \mathbb{N}$ coprimi tali che $0 < \frac{p}{q} < \xi$; ma ξ è infinitesimo > 0, e quindi $\xi < \frac{1}{q}$, da cui che $\frac{p}{q} < \frac{1}{q}$ ossia $p < 1$, assurdo in quanto 1 è il minimo di $\mathbb{N}$.

4. $(4 \Rightarrow 1)$ Siano $0 < x < y$ in $\mathbb{F}$. Se per assurdo avessimo $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora avremmo $0 < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $\frac{x}{y}$ sarebbe infinitesimo, assurdo.

$\square$

Esercizio 4.5. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme numerabile di ${}^*\mathbb{R}$ è limitato.

Dimostrazione. Sia $X = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, ...\right\}$ un sottoinsieme numerabile di ${}^*\mathbb{R}$. Fissiamo i rappresentanti, ponendo $x^{(i)} = \left[\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ al variare di $i \in \mathbb{N}$. Definiamo $y = \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$, dove

$$y_n = \max\left\{x_n^{(1)}, ..., x_n^{(n)}\right\} + 1.$$

Allora osserviamo che $y > x^{(k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : y_i > x_i^{(k)}\right\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : i > k\}$$

in quanto se $i > k$ allora $y_i = \max\left\{x_i^{(1)}, ..., x_i^{(i)}\right\} + 1 > x_i^{(k)}$. Dato che $\{i \in \mathbb{N} : i > k\}$ è cofinito, appartiene a $\mathcal{U}$ in quanto $\mathcal{U}$ è non principale, e quindi anche $\left\{i \in \mathbb{N} : y_i > x_i^{(k)}\right\} \in \mathcal{U}$, da cui che $y > x^{(k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ne consegue che y limita superiormente X. Si ragiona in modo analogo per limitare X inferiormente. $\square$

Esercizio 4.6. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato che estende $\mathbb{R}$. Un elemento *infinito* è un elemento $\xi \in \mathbb{F}$ tale che $|\xi| > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Un elemento *infinitesimo* è un elemento $\xi \in \mathbb{F}$ tale che $|\xi| < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Un elemento *limitato* è un elemento non infinito. Dando per buono il fatto che, per ogni $\xi \in \mathbb{F}$ limitato, esiste un *unico* $\mathrm{st}(\xi) \in \mathbb{R}$ tale che $\xi - \mathrm{st}(\xi)$ sia infinitesimo, dimostrare che, se α e β sono limitati, allora $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$ sono limitati, se β non è infinitesimo allora α/β è limitato, e

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(\alpha+\beta) &= \mathrm{st}(\alpha) + \mathrm{st}(\beta) \\ \mathrm{st}(\alpha\beta) &= \mathrm{st}(\alpha)\,\mathrm{st}(\beta) \\ \mathrm{st}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) &= \frac{\mathrm{st}(\alpha)}{\mathrm{st}(\beta)} \quad (\beta \text{ non infinitesimo}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Diamo per buono il fatto che in un qualunque campo ordinato vale la disuguaglianza triangolare. Ora osserviamo che:

1. Somme e prodotti di limitati sono ovviamente limitati. Inoltre, se β è limitato non infinitesimo, allora $\beta \neq 0$ e anche β^{-1} è limitato e non infinitesimo. Infatti, se β è limitato non infinitesimo, allora esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{1}{n} < |\beta| < m$, e quindi $\beta \neq 0$ e $\frac{1}{m} < \left|\beta^{-1}\right| < n$, da cui che anche β^{-1} è limitato non infinitesimo.

2. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ qualunque, e $\alpha - \beta$ è limitato, allora α è limitato se e solo se lo è β. Infatti, se α è limitato, allora $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ che è somma di limitati e quindi è limitato.

3. Ovviamente α è infinitesimo se e solo se $-\alpha$ è infinitesimo.

4. La somma di due infinitesimi è infinitesimo. Infatti, se α e β sono infinitesimi, allora $|\alpha| < \frac{1}{2n}$ e $|\beta| < \frac{1}{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5. ξ è infinitesimo se e solo se $\mathrm{st}(\xi) = 0$. Infatti, essendo $\xi - \mathrm{st}(\xi)$ infinitesimo, e essendo 0 l'unico infinitesimo di $\mathbb{R}$, abbiamo che se ξ è infinitesimo allora $\mathrm{st}(\xi) = (\mathrm{st}(\xi) - \xi) + \xi$ è somma di infinitesimi e quindi è infinitesimo, quindi $\mathrm{st}(\xi) = 0$, mentre se $\mathrm{st}(\xi) = 0$, allora $\xi = (\xi - \mathrm{st}(\xi)) + \mathrm{st}(\xi)$ è somma di infinitesimi e quindi è infinitesimo.

6. Il prodotto di un infinitesimo e di un limitato è infinitesimo. Infatti, se α è infinitesimo e β è limitato, allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $k - 1 \leq |\beta| < k$. Dato che α è infinitesimo, si ha $|\alpha| < \frac{1}{kn}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta| < \frac{1}{kn}k = \frac{1}{n}$$

e quindi $\alpha\beta$ è infinitesimo.

Ora,

$$(\alpha + \beta) - (\mathrm{st}(\alpha) + \mathrm{st}(\beta)) = (\alpha - \mathrm{st}(\alpha)) + (\beta - \mathrm{st}(\beta))$$

che è infinitesimo perchè somma di infinitesimi, e quindi per unicità della parte standard si ha $\mathrm{st}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{st}\,(\alpha)+\mathrm{st}\,(\beta)$.
Inoltre,

$$\begin{aligned}\alpha\beta-\mathrm{st}\,(\alpha)\,\mathrm{st}\,(\beta) &= (\alpha\beta-\alpha\,\mathrm{st}\,(\beta))+(\alpha\,\mathrm{st}\,(\beta)-\mathrm{st}\,(\alpha)\,\mathrm{st}\,(\beta)) \\ &= \alpha\,(\beta-\mathrm{st}\,(\beta))+(\alpha-\mathrm{st}\,(\alpha))\,\mathrm{st}\,(\beta)\end{aligned}$$

e quindi, dato che il prodotto di un infinitesimo e di un limitato è infinitesimo e dato che la somma di infinitesimi è infinitesima, per unicità della parte standard abbiamo $\mathrm{st}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{st}\,(\alpha)+\mathrm{st}\,(\beta)$.
Ora, mostriamo che se β non è infinitesimo allora $\mathrm{st}\left(\beta^{-1}\right)=\mathrm{st}\,(\beta)^{-1}$. Innanzitutto, dato che β è limitato non infinitesimo, si ha $\beta\neq 0$ e $\mathrm{st}\,(\beta)\neq 0$, e inoltre β^{-1} è limitato non infinitesimo. Allora

$$\begin{aligned}\beta^{-1}-\mathrm{st}\,(\beta)^{-1} &= \frac{\mathrm{st}\,(\beta)-\beta}{\beta\,\mathrm{st}\,(\beta)} \\ &= (\mathrm{st}\,(\beta)-\beta)\,(\beta\,\mathrm{st}\,(\beta))^{-1}\end{aligned}$$

che è il prodotto di un infinitesimo e di un limitato, da cui che è infinitesimo. Per concludere, se α è limitato e β è limitato non infinitesimo, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\mathrm{st}\,(\alpha)}{\mathrm{st}\,(\beta)} &= \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\mathrm{st}\,(\alpha)}{\beta}+\frac{\mathrm{st}\,(\alpha)}{\beta}-\frac{\mathrm{st}\,(\alpha)}{\mathrm{st}\,(\beta)} \\ &= \frac{\alpha-\mathrm{st}\,(\alpha)}{\beta}+\mathrm{st}\,(\alpha)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\mathrm{st}\,(\beta)}\right)\end{aligned}$$

che è la somma di due infinitesimi e quindi è infinitesimo. Per l'unicità della parte standard si ha allora la tesi.

□

Esercizio 4.7. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R}=\frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Sia ${}^*\mathbb{Q}\subseteq{}^*\mathbb{R}$. Sia ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}=\{\xi\in{}^*\mathbb{Q}:\xi \text{ limitato}\}$. Allora ${}^*\mathbb{Q}$ è un sottocampo di ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è un sottoanello di ${}^*\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathcal{I}$ degli infinitesimi di ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è un ideale di ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$, e si ha $\frac{{}^*\mathbb{Q}_{FIN}}{\mathcal{I}}\simeq\mathbb{R}$ (isomorfismo di campi).

Dimostrazione. Dire che $\mathbb{Q}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}$ equivale a dire che nel modello standard è vero che $(\forall x,y\in\mathbb{R})\left(x\in\mathbb{Q}\wedge y\in\mathbb{Q}\to x-y\in\mathbb{Q}\wedge\left(y\neq 0\to xy^{-1}\in\mathbb{Q}\right)\right)$. Allora, per Transfer, nel modello nonstandard è vero che $(\forall x,y\in{}^*\mathbb{R})\left(x\in{}^*\mathbb{Q}\wedge y\in{}^*\mathbb{Q}\to x-y\in{}^*\mathbb{Q}\wedge\left(y\neq 0\to xy^{-1}\in{}^*\mathbb{Q}\right)\right)$, ossia che ${}^*\mathbb{Q}$ è un sottocampo di ${}^*\mathbb{R}$. Inoltre, nel precedente esercizio abbiamo già osservato che somme, differenze e prodotti di iperreali limitati sono limitati, e quindi ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è un sottoanello di ${}^*\mathbb{Q}$. Ora, dato che ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ contiene solo limitati, per ogni elemento $\xi\in{}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è ben definito e unico il reale $\mathrm{st}\,(\xi)$ come l'unico reale tale che $\mathrm{st}\,(\xi)-\xi$ sia infinitesimo. Definiamo allora

$$\begin{aligned}\varphi:{}^*\mathbb{Q}_{FIN} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \mathrm{st}\,(\xi)\end{aligned}$$

e verifichiamo che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli avente come nucleo $\mathcal{I}$. □

1. φ è un omomorfismo di anelli. Infatti, per l'esercizio precedente, se α,β sono limitati allora $\mathrm{st}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{st}\,(\alpha)+\mathrm{st}\,(\beta)$ e $\mathrm{st}\,(\alpha\beta)=\mathrm{st}\,(\alpha)\,\mathrm{st}\,(\beta)$; inoltre, ovviamente $\mathrm{st}\,(1)=1$.

2. φ è suriettivo. Infatti, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, per ogni $r \in \mathbb{R}$ esiste una successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di razionali che converge a r. Allora l'elemento $q = \left[(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in {}^*\mathbb{R}$ è tale che $q - r$ sia infinitesimo: infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $|q_i - r| < \frac{1}{n}$ definitivamente, dunque

$$\left\{ i \in \mathbb{N} : |q_i - r| < \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{U}$$

in quanto è cofinito e $\mathcal{U}$ è non principale. Ne consegue che q è limitato, in quanto $q - r$ è infinitesimo e r è ovviamente limitato: inoltre, $q \in {}^*\mathbb{Q}$ ovviamente, e quindi $q \in {}^*\mathbb{Q}_{FIN}$. Per costruzione si ha $\varphi(q) = \mathrm{st}(q) = r$, e quindi per la generalità di r abbiamo che φ è suriettivo.

3. Il nucleo di φ è $\mathcal{I}$. Infatti, $\xi \in \ker \varphi \iff \mathrm{st}(\xi) = 0$, e abbiamo già visto che questo capita se e solo se ξ è infinitesimo. Allora $\mathcal{I}$ è un ideale di ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$, e per il primo teorema di isomorfismo si ha
$$\frac{{}^*\mathbb{Q}_{FIN}}{\mathcal{I}} \simeq \mathbb{R}.$$

5 Esercizi 10-03-2015

Esercizio 5.1. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^\mathbb{N}}{\mathcal{U}}$. Dimostrare che $|{}^*\mathbb{N}| = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Dato che $\left|\mathbb{R}^\mathbb{N}\right| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, abbiamo che $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |{}^*\mathbb{R}| \leq \mathfrak{c}$ e quindi $|{}^*\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, da cui $|{}^*\mathbb{N}| \leq \mathfrak{c}$. Viceversa, abbiamo visto nell'esercizio precedente che

$$\mathbb{R} \simeq \frac{{}^*\mathbb{Q}_{FIN}}{\mathcal{I}}$$

e quindi certamente deve essere $|{}^*\mathbb{Q}| \geq |{}^*\mathbb{Q}_{FIN}| \geq \mathfrak{c}$. Per concludere, basta allora dimostrare che esiste una bigezione tra ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{N}$. Osserviamo che, nel modello standard, è vero che esiste una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, ossia è vero l'enunciato

$$(\exists f \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}))\,(\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists! y \in \mathbb{Q})\,(f(x,y)) \wedge (\forall y \in \mathbb{Q})\,(\exists! x \in \mathbb{N})\,(f(x,y))$$

e quindi, per Transfer, nel modello nonstandard è vero l'enunciato

$$(\exists f \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}))\,(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(\exists! y \in {}^*\mathbb{Q})\,(f(x,y)) \wedge (\forall y \in {}^*\mathbb{Q})\,(\exists! x \in {}^*\mathbb{N})\,(f(x,y)).$$

Dato che ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{P}({}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{Q})$, il fatto che l'enunciato precedente sia vero nel modello nonstandard implica che esiste una bigezione tra ${}^*\mathbb{N}$ e ${}^*\mathbb{Q}$, come volevasi dimostrare. $\square$

Esercizio 5.2. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali, e sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che:

1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni $\xi \in {}^*A$ tale che $\xi \sim x_0$ si ha ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.

2. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se per ogni $\alpha \sim \beta$ in ${}^*A$ si ha ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$.

3. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è uniformemente continua.

Dimostrazione.

1. Sia f continua in x_0. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello standard valga

$$(\forall x \in A)\left(|x - x_0| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n}\right);$$

per Transfer, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello nonstandard valga

$$(\forall x \in {}^*A)\left(|x - x_0| < \frac{1}{m} \to |{}^*f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n}\right).$$

Sia $\xi \in {}^*A$ tale che $\xi \sim x_0$. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha che $|\xi - x_0| < \frac{1}{m}$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello nonstandard valga la proprietà precedente. Dato che $|\xi - x_0| < \frac{1}{m}$, allora si ha

$$|{}^*f(\xi) - f(x_0)| < \frac{1}{n}.$$

Per la generalità di n, si ha che ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$, come volevasi dimostrare.
Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \in {}^*A$ tale che $\xi \sim x_0$ si abbia ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$. Sia $\epsilon > 0$ numero reale. Allora nel modello nonstandard vale

$$(\exists \mu \in {}^*\mathbb{N})(\forall \xi \in {}^*A)\left(|\xi - x_0| < \frac{1}{\mu} \to |{}^*f(\xi) - f(x_0)| < \epsilon\right):$$

infatti, basta prendere $\mu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, in quanto in tal caso $\frac{1}{\mu}$ è infinitesimo e quindi $|\xi - x_0| < \frac{1}{\mu}$ implica $\xi \sim x_0$, da cui ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$ e quindi $|{}^*f(\xi) - f(x_0)| < \epsilon$. Allora, per Transfer, nel modello standard vale

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x \in A)\left(|x - x_0| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\right)$$

e quindi per la generalità di $\epsilon > 0$ si ha che la f è continua in x_0.

2. Sia f uniformemente continua. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello standard valga

$$(\forall x, y \in A)\left(|x - y| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}\right);$$

per Transfer, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello nonstandard valga

$$(\forall \alpha, \beta \in {}^*A)\left(|\alpha - \beta| < \frac{1}{m} \to |{}^*f(\alpha) - {}^*f(\beta)| < \frac{1}{n}\right).$$

Siano $\alpha \sim \beta$ in ${}^*A$ e fissiamo $n \in \mathbb{N}$: sia $m \in \mathbb{N}$ tale che m, n rispettino l'enunciato precedente. Allora, dato che $|\alpha - \beta| < \frac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$|{}^*f(\alpha) - {}^*f(\beta)| < \frac{1}{n}.$$

Per la generalità di $n \in \mathbb{N}$, si ha che ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$ come volevasi dimostrare.
Viceversa, supponiamo che per ogni $\alpha, \beta \in {}^*A$ tali che $\alpha \sim \beta$ si abbia ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$. Sia $\epsilon > 0$ numero reale. Allora nel modello nonstandard vale

$$(\exists \mu \in {}^*\mathbb{N})(\forall \alpha, \beta \in {}^*A)\left(|\alpha - \beta| < \frac{1}{\mu} \to |{}^*f(\alpha) - {}^*f(\beta)| < \epsilon\right):$$

infatti, basta prendere μ ipernaturale infinito come nel punto precedente. Allora, per Transfer, nel modello standard vale

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x, y \in A)\left(|x - y| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(y)| < \epsilon\right)$$

e quindi per la generalità di $\epsilon > 0$ si ha che la f è uniformemente continua.

3. Sia $A = [a, b]$. Sfruttando i punti precedenti, dimostriamo che per ogni $\xi \in {}^*A$ si ha che $x_0 \sim \xi$ implica $f(x_0) \sim {}^*f(\xi)$ se e solo se per ogni $\alpha, \beta \in {}^*A$ si ha che $\alpha \sim \beta$ implica ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$. La direzione $\Leftarrow$ è ovvia. Per quanto riguarda la direzione $\Rightarrow$, ricordiamo che dato che

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

allora

$${}^*A = \{x \in {}^*\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

e quindi gli elementi di ${}^*A$ sono limitati: per la precisione, se $\alpha \in {}^*A$, allora $\mathrm{st}(\alpha) \in A$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in {}^*A$, si ha che se $\alpha \sim \beta$ allora $\alpha \sim \mathrm{st}(\alpha) = \mathrm{st}(\beta) \sim \beta$, e quindi ${}^*f(\alpha) \sim f(\mathrm{st}(\alpha)) = f(\mathrm{st}(\beta)) \sim {}^*f(\beta)$.

4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è localmente limitata

□

6 Esercizi 16-03-2015

Esercizio 6.1. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Dimostrare che la coinizialità di ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ è più che numerabile.

Dimostrazione. Sia $X \subseteq {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ numerabile, e dimostriamo che X *non* è coiniziale in ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, ossia che esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che per ogni $\alpha \in X$ si abbia $\xi < \alpha$. Osserviamo innanzitutto che $\xi \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ se e solo se $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ e $\xi > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia ξ è infinito. Infatti, se per esempio $\xi \leq n$, allora nel modello standard vale $(\xi = 1) \vee \cdots \vee (\xi = n)$, e quindi per Transfer questo vale anche nel modello nonstandard, da cui $\xi \in \mathbb{N}$.
Fissiamo ora dei rappresentanti per gli elementi di X: poniamo $X = \left\{x^{(i)}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $x^{(i)} = \left[\left(x_j^{(i)}\right)_{j \in \mathbb{N}}\right]$ e WLOG $x_j^{(i)} \in \mathbb{N}$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$. Definiamo ora

$$A^{(n)} = \left\{j \in \mathbb{N} : \left(x_j^{(1)} \geq n\right) \wedge \cdots \wedge \left(x_j^{(n)} \geq n\right)\right\}.$$

Osserviamo che $A^{(n)} \in \mathcal{U}$: infatti, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\left\{ j \in \mathbb{N} : x_j^{(i)} \geq n \right\} \in \mathcal{U}$ in quanto gli $x^{(i)}$ sono tutti infiniti: allora, dato che ogni $A^{(n)}$ è un'intersezione finita di insiemi di questo tipo, ogni $A^{(n)}$ sta in $\mathcal{U}$. Osserviamo che si ha la seguente catena di inclusioni facili da verificare:

$$\mathbb{N} = A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq A^{(3)} \supseteq \cdots .$$

Allora è ben definita la seguente successione $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$: per ogni $j \in A^{(n)} \setminus A^{(n+1)}$, poniamo

$$\xi_j = \min \left\{ x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right\}.$$

Sia $\xi = \left[(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \right]$. Allora:

1. Si ha $\xi \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per dimostrarlo, basta far vedere che $\{ j \in \mathbb{N} : \xi_j \geq n \} \supseteq A^{(n)}$, in quanto $A^{(n)} \in \mathcal{U}$.
   Se $j \in A^{(n)}$, allora $\xi_j = \min \left\{ x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right\}$; ma, per definizione di $A^{(n)}$, si ha $x_j^{(1)} \geq n \wedge \cdots \wedge x_j^{(n)} \geq n$, e quindi $\xi_j \geq n$.

2. Si ha $\xi \leq x^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per dimostrarlo, basta far vedere che $\left\{ j \in \mathbb{N} : \xi_j \leq x_j^{(n)} \right\} \supseteq A^{(n)}$, in quanto $A^{(n)} \in \mathcal{U}$.
   Se $j \in A^{(n)}$, allora $\xi_j = \min \left\{ x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)} \right\}$; ma, per definizione di $A^{(n)}$, si ha $\xi_j \leq x_j^{(n)}$

A questo punto l'elemento $\xi - 1$ soddisfa la tesi: infatti, si ha $\xi - 1 < \xi \leq x^{(n)}$ per ogni n, e inoltre $\xi - 1 \geq n - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui che $\xi - 1 > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\xi - 1 \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

□

Esercizio 6.2. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Sia $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Sia $[1, \nu] = \{ \alpha \in {}^*\mathbb{N} : 1 \leq \alpha \leq \nu \}$. Dimostrare che $|[1, \nu]| = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $|{}^*\mathbb{N}| = \mathfrak{c}$, e quindi $|[1, \nu]| \leq \mathfrak{c}$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta, ragioniamo come segue. Ricordiamo che l'intervallo $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$, e quindi è sufficiente trovare una mappa iniettiva da $(0,1)$ a $[1, \nu]$. Fissiamo un rappresentante $\left[(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \right] = \nu$, con WLOG $\nu_n \in \mathbb{N}$. Definiamo ora

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (0,1) & \rightarrow & [1, \nu] \\ \alpha & \mapsto & \left[(\lceil \nu_n^\alpha \rceil)_{n \in \mathbb{N}} \right] \end{array}$$

dove $\lceil \nu_n^\alpha \rceil$ denota il minimo dei maggioranti di ν_n^α in $\mathbb{N}$. Per concludere, basta verificare che φ è ben definita e iniettiva.

1. Ovviamente $\varphi(\alpha) \in {}^*\mathbb{N}$ per ogni $\alpha \in (0,1)$, in quanto per definizione $\lceil r \rceil \in \mathbb{N}$ per ogni $r \in \mathbb{R}^+$. Ora, fissato $\alpha \in (0,1)$, dimostriamo che $\varphi(\alpha) \leq \nu$. Dato che $\nu_n^\alpha \leq \nu_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha anche $\lceil \nu_n^\alpha \rceil \leq \nu_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui che $\varphi(\alpha) \leq \nu$. Ne consegue che φ è ben definita.

2. φ è iniettiva. Infatti, siano $\alpha < \beta \in (0,1)$. Dimostriamo che $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, ossia che esiste un insieme $A \in \mathcal{U}$ tale che
$$(\forall n \in A)\left(\lceil \nu_n^\alpha \rceil < \lceil \nu_n^\beta \rceil\right).$$
Osserviamo che, se per un certo $n \in \mathbb{N}$ si ha $\nu_n^\beta - \nu_n^\alpha > 1$, allora sicuramente si ha $\lceil \nu_n^\beta \rceil > \lceil \nu_n^\alpha \rceil$. Dunque è sufficiente trovare un $A \in \mathcal{U}$ tale che, per ogni $n \in A$, si abbia $\nu_n^\beta - \nu_n^\alpha > 1$. Consideriamo la funzione
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^\beta - x^\alpha : \end{array}$$
la f è strettamente crescente e superiormente illimitata, e quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N$, si abbia $f(n) > 1$. Ora, dato che ν è infinito, esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che, per ogni $n \in A$, si abbia $\nu_n \geq N$. Allora, se $n \in A$, si ha $\nu_n^\beta - \nu_n^\alpha = f(\nu_n) > 1$. Ne consegue la tesi.

$\square$

Nei prossimi esercizi servirà il seguente

Lemma 6.3. *Siano $f, g : I \to J$, e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Diremo che $f \equiv_\mathcal{U} g$ se e solo se $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Allora, se $f \equiv_\mathcal{U} g$ allora $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$.*

Dimostrazione. Chiamiamo $A = \{i \in I : f(i) = g(i)\}$: allora $f \equiv_\mathcal{U} g$ equivale ad $A \in \mathcal{U}$. Mostriamo che $f_*(\mathcal{U}) \subseteq g_*(\mathcal{U})$: la tesi allora sarà vera per simmetria. Sia $X \in f_*(\mathcal{U})$: allora $f^{-1}(X) \in \mathcal{U}$, e quindi $A \cap f^{-1}(X) \in \mathcal{U}$. Osserviamo ora che $A \cap f^{-1}(X) \subseteq g^{-1}(X)$: infatti, se $x \in A \cap f^{-1}(X)$, allora $f(x) = g(x)$ e $f(x) \in X$, da cui che $g(x) \in X$ e quindi $x \in g^{-1}(X)$. Dato che $\mathcal{U}$ è chiuso per soprainsiemi, si ha che $g^{-1}(X) \in \mathcal{U}$, e quindi $X \in g_*(\mathcal{U})$. $\square$

Esercizio 6.4. Sia $f : I \to I$ e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Dimostrare che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ se e solo se $f \equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Per il lemma precedente, se $f \equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$, allora $f_*(\mathcal{U}) = \mathrm{id}_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.
($\Rightarrow$) Sia $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Dimostriamo che $f \equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$. Supponiamo per assurdo che $f \not\equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$: allora, se $F = \{i \in I : f(i) = i\}$ è l'insieme dei punti fissi di f, allora $F \notin \mathcal{U}$, e quindi $F^c \in \mathcal{U}$. Definiamo $g : I \to I$ tale che $g_{|F^c} = f_{|F^c}$ e $g(i) \neq i$ per ogni $i \in F$. Allora, dato che f e g coincidono su un insieme $\mathcal{U}$-grande, si ha che $f \equiv_\mathcal{U} g$ e quindi $g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Inoltre, g non ha punti fissi: infatti, se $i \notin F$, allora $g(i) = f(i) \neq i$, mentre se $i \in F$ allora $g(i) \neq i$ per definizione. In un esercizio precedente, abbiamo visto che esiste una 3-colorazione $C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 = I$ tale che, per ogni $i \in I$, i e $g(i)$ appartengano a colori diversi. Ora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, possiamo supporre che WLOG $C_1 \in \mathcal{U}$, da cui $C_2 \cup C_3 \notin \mathcal{U}$. Ora, dato che $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e $C_1 \in \mathcal{U}$, allora $g^{-1}(C_1) \in \mathcal{U}$: ma $g^{-1}(C_1) \subseteq C_2 \cup C_3$, in quanto se $g(x) \in C_1$ allora $x \notin C_1$ per definizione dei C_i; ne consegue che $C_2 \cup C_3 \in \mathcal{U}$, assurdo. $\square$

Esercizio 6.5. Siano $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ ultrafiltri su I, J, K rispettivamente.

1. Se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$, allora $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$.

2. Supponiamo che I, J siano infiniti e $|I| = |J|$. Allora $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ se e solo se esiste una bigezione $f : I \to J$ tale che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Ci serve il seguente

Lemma. *Siano $f : I \to J$ e $g : J \to K$. Allora $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, sia $\mathcal{V} = f_* (\mathcal{U})$ e sia $\mathcal{W} = g_* (\mathcal{V})$. Vogliamo dimostrare che $(g \circ f)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{W}$. Sia $X \in (g \circ f)_* (\mathcal{U})$. Allora $(g \circ f)^{-1} (X) = f^{-1} \left(g^{-1} (X) \right) \in \mathcal{U}$, e dunque $g^{-1} (X) \in f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, da cui che $X \in g_* (\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Dunque $(g \circ f)_* (\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}$, e dato che sono entrambi ultrafiltri vale anche l'uguaglianza. $\square$

Ora possiamo risolvere l'esercizio.

1. Se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$, allora esistono $f : J \to I$ e $g : K \to J$ tali che $f_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $g_* (\mathcal{W}) = \mathcal{V}$. Allora $(f \circ g)_* (\mathcal{W}) = f_* (g_* (\mathcal{W})) = f_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$, e quindi $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$.

2. Se esiste una bigezione $f : I \to J$ tale che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, allora chiaramente $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$; inoltre, sia $g : J \to I$ l'inversa di f: allora $g_* (\mathcal{V}) = g_* (f_* (\mathcal{U})) = (g \circ f)_* (\mathcal{U}) = (\mathrm{id}_I)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e quindi $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.
   Viceversa, supponiamo che $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Allora esistono $f : I \to J$ e $g : J \to I$ tali che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ e $g_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Allora abbiamo $(g \circ f)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e $(f \circ g)_* (\mathcal{V}) = \mathcal{V}$, da cui che, per l'esercizio precedente, si ha $(g \circ f) \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{id}_I$ e $(f \circ g) \equiv_{\mathcal{V}} \mathrm{id}_J$. Questo vuol dire che esistono $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{V}$ tali che $(g \circ f) (a) = a$ per ogni $a \in A$ e $(f \circ g) (b) = b$ per ogni $b \in B$. Osserviamo ora che la restrizione $f : g (B) \to B$ è biunivoca. Infatti, siano $x_1 \neq x_2 \in g (B)$: allora $x_1 = g (b_1)$ e $x_2 = g (b_2)$ per certi $b_1 \neq b_2 \in B$, e quindi $f (x_1) = b_1 \neq b_2 = f (x_2)$, da cui che $f_{|g(B),B}$ è iniettiva; inoltre, se $b \in B$, allora $b = f (g (b))$, da cui che $f_{|g(B),B}$ è suriettiva. Osserviamo inoltre che $g (B) \in \mathcal{U}$: infatti, $g^{-1} (g (B)) \supseteq B \in \mathcal{V}$ e quindi $g (B) \in g_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Ora, l'obiettivo è trovare una $\tilde{f} : I \to J$ tale che $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f$ e $\tilde{f}$ sia biunivoca: in questo modo, dato che $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f \Rightarrow \tilde{f}_* (\mathcal{U}) = f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, abbiamo finito. Rinominiamo $C = g (B)$, e osserviamo che dato che $f : C \to B$ è biunivoca si ha $|C| = |B|$. Ora consideriamo due casi.

   (a) $|C| < |I|$. Allora $|B| < |I| = |J|$, e quindi dato che $|I| = |C| + |C^c|$ e $|J| = |B| + |B^c|$, deve essere $|C^c| = |I| = |J| = |B^c|$. Allora esiste una bigezione $\varphi : C^c \to B^c$. Definiamo

   $$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\to J \\ x &\mapsto \begin{cases} f (x) & x \in C \\ \varphi (x) & x \in C^c \end{cases} \end{aligned}$$

   e osserviamo che la $\tilde{f}$ così definita è biunivoca in quanto incollamento di due funzioni biunivoche, e inoltre $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f$ in quanto $\tilde{f}$ e f coincidono su C che è un insieme $\mathcal{U}$-grande.

   (b) $|C| = |I|$. Dato che I è infinito, esiste una partizione $C_1 \sqcup C_2 = C$ tale che $|C_1| = |C_2| = |C| = |I|$. Dato che $f : C \to B$ è una bigezione, essa induce una partizione $B_1 \sqcup B_2 = B$ con $B_i = f (C_i)$, e quindi $|B_1| = |B_2| = |B| = |I|$. Dato che $C \in \mathcal{U}$, possiamo supporre WLOG $C_1 \in \mathcal{U}$. Osserviamo ora che $f : C_1 \to B_1$ è una bigezione per definizione, e inoltre $|C_1^c| = |C_2| + |C^c| = |I| = |B_2| + |B^c| = |B_1^c|$. Allora esiste una bigezione $\varphi : C_1^c \to B_1^c$. Definiamo

   $$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\to J \\ x &\mapsto \begin{cases} f (x) & x \in C_1 \\ \varphi (x) & x \in C_1^c \end{cases} \end{aligned}$$

e osserviamo che la $\tilde{f}$ così definita è biunivoca in quanto incollamento di due funzioni biunivoche, e inoltre $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f$ in quanto $\tilde{f}$ e f coincidono su C_1 che è un insieme $\mathcal{U}$-grande.

$\square$