Ultrafiltri Selettivi e ordine di Rudin-Kisler

Gioacchino Antonelli

19 Aprile

In tutti gli esercizi prenderò gli ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Ricordo che se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, allora $f_\star(\mathcal{U}) := \{A \subseteq \mathbb{N} | f^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$.

Dati $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ ultrafiltri su $\mathbb{N}$ dirò che sono isomorfi, ovvero $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ se e solo se esiste una bigezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\sigma_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Lemma 1: *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafilro su $\mathbb{N}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Allora $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva.*

Dimostrazione:

- ($\Rightarrow$) Per ipotesi esiste $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una bigezione tale che $\sigma(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ e per un risultato mostrato in un pdf precedente, ciò significa che $A = \{i | \sigma(f(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. A questo punto è semplice notare che $f|_A$ è iniettiva: infatti se $f(x) = f(y)$ con $x, y \in A$, allora $\sigma(f(x)) = \sigma(f(y))$ e per l'appartenenza ad A, segue $x = y$.

- ($\Leftarrow$) Esiste A per cui $f : A \to \mathbb{N}$ è iniettiva. Costruisco $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che $f \equiv_\mathcal{U} \sigma$. In questo modo avrei che, per un risultato mostrato in un pdf precedente, $f(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$ e dunque, essendo σ una bigezione, $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$.

  Se A è finito, allora $X = \mathbb{N} \setminus A$ ha la stessa cardinalità di $Y = \mathbb{N} \setminus f(A)$. Dunque esiste una bigezione $\sigma_1 : X \to Y$ e definisco $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in questo modo

  $$\sigma(n) = f(n) \quad \text{se } n \in A$$

  $$\sigma(n) = \sigma_1(n) \quad \text{se } n \notin A$$

  La σ così costruita è una bigezione e coincide con f almeno su A, che appartiene all'ultrafiltro. Dunque $f \equiv_\mathcal{U} \sigma$ e la tesi segue per quanto detto prima.

  Se A non è finito, allora è numerabile. E' noto dalla teoria degli insiemi che esiste una bigezione $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$. Allora è possibile scrivere A come unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti numerabili, ovvero $A = A_1 \sqcup A_2$, uno dei quali, senza perdita di generalità A_1, deve essere nell'ultrafiltro, poiché $A \in \mathcal{U}$. Allora, siccome $A_2 \subset \mathbb{N} \setminus A_1$, e A_2 è infinito numerabile, sicuramente $\mathbb{N} \setminus A_1$ è infinito numerabile. Analogamente $f(A_2) \subset \mathbb{N} \setminus f(A_1)$ ed essendo f iniettiva su A, $f(A_2)$ sarà infinito numerabile e dunque anche $\mathbb{N} \setminus f(A_1)$. Allora esiste una bigezione $\sigma_1 : \mathbb{N} \setminus A_1 \to \mathbb{N} \setminus f(A_1)$ e definisco $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in questo modo

  $$\sigma(n) = f(n) \quad \text{se } n \in A_1$$

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) \quad \text{se } n \notin A_1$$

La σ così costruita è una bigezione e coincide con f almeno su A_1, che appartiene all'ultrafiltro. Dunque $f \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ e la tesi segue per le osservazioni precedenti.

Lemma 2: *Se $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$, allora $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.*

Dimostrazione: Per ipotesi esistono $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che $\mathcal{U} = f(\mathcal{V})$ e $\mathcal{V} = g(\mathcal{U})$. Dunque $\mathcal{U} = f(g(\mathcal{U})$ e per un noto risultato, $f \circ g \equiv_U \mathrm{id}$. Dunque $A = \{i | f(g(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. Chiaramente $g|_A$ è iniettiva poiché se $g(x) = g(y)$ per $x, y \in A$, allora $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$. Allora per il Lemma 1, $g(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$. Ma $g(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ e dunque $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$ come volevo mostrare.

Esercizio 1: *$\forall \mathcal{U}$ ultrafiltro non principale, $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ ma non vale che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U}$. Dunque $\leq_{RK}$ non ammette elementi massimali*

Dimostrazione: Sia $\pi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la proiezione sulla prima coordinata (ovvero $\pi_1(n, m) = n$). Mostro che $\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Infatti $\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \{A \subseteq \mathbb{N} | \pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\}$. D'altra parte $\pi_1^{-1}(A) = A \times \mathbb{N}$. Per definizione di ultrafiltro prodotto, $A \times \mathbb{N} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ se e solo se $\{i | (A \times \mathbb{N})_i \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Inoltre, banalmente, $(A \times \mathbb{N})_i = \emptyset$ se $i \notin A$ e $(A \times \mathbb{N})_i = \mathbb{N}$ se $i \in A$. Dunque, viste le definizioni, $A \times \mathbb{N} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$. Dunque $\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e, per definizione, $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.

Se per assurdo fosse anche $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U}$, per il Lemma 2 avrei che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \cong \mathcal{U}$, ovvero $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \cong \pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$. Dunque per il Lemma 1 esiste un A in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ tale che $\pi_1|_A$ è una mappa iniettiva. Ciò significa che per ogni $i \in \mathbb{N}$, esiste al più un elemento j tale che $(i, j) \in A$, infatti se ne esistessero due (i, j_1) e (i, j_2), le loro proiezioni lungo la prima componente sarebbero uguali, contraddicendo il fatto che $\pi_1|_A$ è iniettiva. Dunque $|\{j | (i, j) \in A\}| \in \{0, 1\}$. Essendo $\mathcal{U}$ non principale, allora $\{i | \{j | (i, j) \in A\} \in \mathcal{U}\}$ è vuoto e dunque, per la stessa definizione di ultrafiltro prodotto, A non può appartenere a $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e ciò è assurdo.

Esercizio 2: Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Le seguenti sono equivalenti

1. $\mathcal{U}$ è $\leq_{RK}$-minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.
2. Se $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è una partizione tale che $\emptyset \neq A_i \notin \mathcal{U}$ per ogni i, allora esiste $X \in \mathcal{U}$ selettore, cioè tale che $X \cap A_i$ ha un elemento esattamente per ogni i.
3. $\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costante oppure iniettiva
4. Con questo ultrafiltro, ${}^{\star}\mathbb{N} = \{[f]_{\mathcal{U}} | f \text{è costante o bigezione}\}$.

Dimostrazione:

- (1) $\Rightarrow$ (3). Considero una generica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Per definizione $f(\mathcal{U}) \leq_{RK} \mathcal{U}$, dunque essendo $\mathcal{U}$ minimale, $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$. Il Lemma 1 implica, dunque, l'esistenza di $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva.

- (3) $\Rightarrow$ (1). Suppongo esista $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$, con $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, ovvero $\mathcal{V}$ non principale, tale che però non valga $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$. Allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$. Se esistesse $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costante, allora $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ sarebbe principale, contro l'assunzione iniziale. Allora esista $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva. Il Lemma 2, allora, implica $\mathcal{V} = f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$, che è assurdo rispetto a quanto detto. Dunque $\mathcal{U}$ è minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

- (2) $\Rightarrow$ (3). Considero una generica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Se esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costante allora ho concluso. Altrimenti $f^{-1}(i) \notin \mathcal{U} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Allora $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^{-1}(i)$. Eliminando dall'unione disgiunta gli insiemi eventualmente vuoti, in virtù dell'ipotesi, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap f^{-1}(i)$ ha esattamente un elemento per ogni $i \in \mathbb{N}$, tale che $f^{-1}(i)$ sia non vuoto. Ciò implica evidentemente che $f|_X$ è iniettiva.

- (3) $\Rightarrow$ (2). Sia $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i \notin \mathcal{U}$ per ogni i. Definisco $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che $f|_{A_i} = i$ per ogni i. Per ipotesi, allora, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f|_X$ è costante o iniettiva. Se $f|_X = l$, allora $X \subseteq A_l$, e dunque appartenendo X all'ultrafiltro, dovrebbe essere anche $A_l \in \mathcal{U}$, ma ciò è assurdo vista l'ipotesi. Dunque $f|_X$ è iniettiva. Sicuramente $|X \cap A_i| \leq 1$ per ogni i, vista l'iniettività di $f|_X$. Scegliendo opportunamente $X' \supseteq X$ tale che $|X' \cap A_i| = 1$, ho la tesi (mi basta aggiungere un elemento in A_i per ogni i tale che $|X \cap A_i| = 0$) poiché $X' \in \mathcal{U}$ essendo soprainsieme di X.

- (4) $\Rightarrow$ (3) Ovvia perché, data $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$, esisterebbe per ipotesi, una g tale che $[g] = [f]$, con g costante o bigettiva. Dunque esiste un $A \in \mathcal{U}$ tale che $g|_A = f|_A$ e dunque $f|_A$ costante o iniettiva.

- (3) $\Rightarrow$ (4). Se esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è costantemente k, allora $[f] = [g]$ dove g è la funzione che vale costantemente k. Altrimenti esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva. Nel Lemma 1, sotto questa ipotesi, nel fare la seconda freccia, ho mostrato che se $f|_A$ è iniettiva, allora esiste una bigezione σ tale che $f \equiv_U \sigma$. Dunque $[f] = [\sigma]$, con σ bigezione, come volevo.