# Caratterizzazione non-standard sindetici e spessi

Gioacchino Antonelli

19 Aprile

**Esercizio 1**: *(Caratterizzazione non-standard degli spessi) Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ Le seguenti sono equivalenti:*

1. *$A$ è spesso.*
2. *$\exists I \subseteq {}^\star A$, tale che $I$ è un intervallo infinito, ovvero, $I = [\nu, \mu]$ con $\mu - \nu$ infinito.*
3. *$\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N} \exists I$ intervallo di lunghezza $\nu$ con $I \subseteq {}^\star A$.*
4. *$\exists \xi \in {}^\star\mathbb{N}$ t.c. $\xi + n \in {}^\star A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

*Dimostrazione:*

- (1) $\Rightarrow$ (3). Sia $\nu = [\nu_i]_{i \in \mathbb{N}}$. Poiché $A$ è spesso, esistono, per ogni $i$, $a_i < b_i$ in $A$ e tali che $|b_i - a_i| = \nu_i$ e $[a_i, b_i] \subseteq A$. Sia $a = [a_i]_{i \in \mathbb{N}}$ e $b = [b_i]_{i \in \mathbb{N}}$. Per la definizione stessa di cardinalità non standard, $|[a, b]| = \nu$ e inoltre è chiaro che se $x \in [a, b]$, allora $x \in {}^\star A$, per come è stato definito $[a, b]$.
- (3) $\Rightarrow$ (2). Ovvio, per specializzazione.
- (2) $\Rightarrow$ (1). Se $A$ non fosse spesso, esisterebbe un certo $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[n, n + k - 1]$ non è contenuto in $A$, ovvero esiste un $a_n$ tale che $a_n \in [n, n + k - 1] \cap A^c$. Siccome $I = [\nu, \mu]$ è un intervallo infinito, $X = \{i \in \mathbb{N} | \mu_i - \nu_i > k\} \in \mathcal{U}$. Per ogni $i \in X$ Considero $a_{\nu_i}$ come definito sopra. E' chiaro che, essendo $\mu_i - \nu_i > k$, e $a_{\nu_i} \in [\nu_i, \nu_i + k - 1]$, allora $a_{\nu_i} \in [\nu_i, \mu_i]$. Ora definisco $b = [b_i]_{i \in \mathbb{N}}$ come segue.

  $$b_i = a_{\nu_i} \quad \text{se } i \in X$$

  $$b_i = 0 \quad \text{altrimenti}$$

  Allora $b \in [\nu, \mu]$ poiché $Y = \{i | \nu_i \leq b_i \leq \mu_i\} \supseteq X$ per costruzione, e dunque $Y \in \mathcal{U}$. D'altronde $Z = \{i | b_i \in A^c\} \supseteq X$, per costruzione e poiché $a_{\nu_i} \in A^c$. Dunque $\{i | b_i \in A^c\} \in \mathcal{U}$ e dunque $\{i | b_i \in A\} \notin \mathcal{U}$. Ciò implica che $b \notin {}^\star A$ ma ciò è assurdo poiché per ipotesi so che $[\nu, \mu] \subseteq {}^\star A$ mentre ho appena dimostrato che $b \in [\nu, \mu]$ ma $b \notin {}^\star A$. Dunque $A$ deve essere spesso.
- (2) $\Rightarrow$ (4) ovvio poiché $\mu - \nu$ è infinito e mi basta scegliere $\xi = \nu$.
- (4) $\Rightarrow$ (2). E' una semplice applicazione dell'overspill. Infatti per ogni $i \in \mathbb{N}$, $[\xi, \xi + i] \in {}^\star A$, dunque esiste $\nu$ infinito tale che $[\xi, \xi + \nu] \in {}^\star A$.

E' chiaro che $B$ è sindetico se e solo se $B^c$ non è spesso. Ma ciò vista l'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (2) è equivalente al fatto che $\forall I$ intervallo infinito, $I$ non è contenuto in ${}^\star B^c = ({}^\star B)^c$ per quanto mostrato in uno scorso esercizio. Dunque $I \cap {}^\star B \neq \emptyset$.

Inoltre vista l'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (4), il fatto che $B^c$ non è spesso è equivalente al fatto che per ogni $\xi$, $\{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^\star B^c = ({}^\star B)^c\} \neq \mathbb{N}$ e dunque $\{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^\star B\} \neq \emptyset$.

Dunque si possono affermare immediatamente le seguenti equivalenze:

**Corollario 1:** *Le seguenti sono equivalenti*

1. *$B$ è sindetico.*
2. *$\forall I$ intervallo infinito, $I \cap {}^\star B \neq \emptyset$ (ovvero ${}^\star B$ non ha buchi infiniti).*
3. *$\forall \xi \in {}^\star\mathbb{N}$, $B_\xi := \{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^\star B\} \neq \emptyset$.*
4. *Esiste $k$ finito per cui ${}^\star B$ ha solo buchi di ampiezza minore o uguale a $k$.*

Dove l'unica equivalenza non mostrata, (1) $\Leftrightarrow$ (4) è una immediata applicazione del principio di transfer usando come $k$ quello dato dalla sindeticità di $B$.