Esercizi vari

Federico Scavia

April 17, 2015

0.1 Densità

Se $A \subseteq \mathbb{Z}$, indichiamo con $BD(A)$ la densità di Banach di A, con $\overline{d}(A)$ la densità superiore di A e con $\underline{d}(A)$ quella inferiore.

Per brevità, indichiamo $[n] := \{1, \ldots, n\}$

Esercizio 1. *Trovare un insieme* $A \subseteq \mathbb{N}$ *tale che* $\overline{d}(A) = 0$ *ma* $BD(A) = 1$.

Proof. Un esempio è

$$A = \{2^n + k | n, k \in \mathbb{N}, k < n\}.$$

La densità di Banach di A è 1 (ovvero, A è spesso), perché $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\{2^n, 2^n + 1, \ldots 2^n + n - 1\} \subseteq A$.

La densità superiore di A è 0 perché se $n \in \mathbb{N}$, scelto $m \in \mathbb{N}$ tale che $2^m \leq n < 2^{m+1}$, ovviamente $A \cap [n] \subseteq A \cap [2^{m+1} - 1]$ e dunque

$$|A \cap [n]| \leq 1 + 2 + \cdots + m = m(m+1)/2 \leq \log_2(n)(\log_2(n) + 1)/2 = o(n) \ (n \to \infty).$$

□

Esercizio 2. *Siano* $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *con* $A \cap B = \emptyset$. *Allora*

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B).$$

Proof.

1. Sia $\epsilon > 0$. Esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq M$

   $$|A \cap [n]|/n \geq \underline{d}(A) - \epsilon, \ |B \cap [n]|/n \geq \underline{d}(B) - \epsilon.$$

   Se $n \geq M$, siccome $A \cap B = \emptyset$ si ha

   $$|(A \cup B) \cap [n]|/n \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B) - 2\epsilon.$$

   Dunque passando al liminf

   $$\underline{d}(A \cup B) \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B) - 2\epsilon$$

   e si conclude per arbitrarietà di ϵ.

2. Sia $\epsilon > 0$. Esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m \geq M$

   $$|(A \cup B) \cap [m]|/m \geq \underline{d}(A \cup B) - \epsilon.$$

D'altra parte $\forall N \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq N$ tale che

$$|B \cap [n]|/n \leq \underline{d}(B) + \epsilon.$$

Dato $N \geq M$, esiste dunque $n \geq N$ tale che

$$|A \cap [m]|/m = |(A \cup B) \cap [m]|/m - |B \cap [m]|/m \geq \underline{d}(A \cup B) - \underline{d}(B) - 2\epsilon.$$

Questo è esattamente come dire

$$\overline{d}(A) \geq \underline{d}(A \cup B) - \underline{d}(B) - 2\epsilon,$$

da cui la tesi per arbitrarietà di ϵ.

Le ultime due disuguaglianze si dimostrano con ragionamenti simmetrici. □

Esercizio 3. *Sia* $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ *e supponiamo* $\sum_n \frac{1}{a_n} < \infty$. *Dimostrare che allora* $d(A) = \overline{d}(A) = 0$.

Proof.

Lemma 0.1. *Sia* $A \subseteq \mathbb{N}$ *e sia* $F \subseteq A$ *finito. Allora* $\overline{d}(A) = \overline{d}(A \setminus F)$.

Proof. $d(F) = \overline{d}(F) = 0$ e sappiamo che il limsup commuta con la somma di successioni quando una delle due ha limite. □

Sia per assurdo $\overline{d}(A) > 0$. Fissiamo un numero reale l tale che $0 < l < \overline{d}(A)$. Allora esistono n arbitrariamente grandi per cui $A \cap [n] \geq nl$. Preso un tale n, si ha

$$\sum_k \frac{1}{a_k} \geq \sum_{k \in A \cap [n]} \frac{1}{a_k} \geq \sum_{[n(1-l)]}^{n} \frac{1}{k}.$$

Dall'analisi elementare sappiamo che esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)| \leq \frac{1}{2} \log(\frac{1}{1-l}).$$

Se scegliamo n di sopra di modo che sia $n \geq M$, allora

$$\sum_{k \in A \cap [n]} \frac{1}{a_k} \geq \log(\frac{n}{n - nl}) - \frac{1}{2} \log(\frac{1}{1-l} = \frac{1}{2} \log(\frac{1}{1-l}).$$

Posto $C = \log(\frac{1}{1-l}) > 0$, abbiamo mostrato che se la serie è almeno C. La costante dipende solo da $\overline{d}(A)$ (ad esempio se conveniamo di prendere sempre $l = \frac{1}{2}\overline{d}(A)$). Concludiamo quindi con il lemma: se consideriamo $A_1 = A \setminus [n]$, esiste n_1 tale che $|A_1 \cap [n_1]| \geq n_1 l$, dunque la serie associata ad A_1 è almeno C, dunque quella di A è almeno $2C$. Procedendo induttivamente si dimostra che la serie corrispondente ad A è $\geq nC$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ovvero è divergente.

□

Esercizio 4. *Se* $\underline{d}(B) = \alpha$ *allora esiste* $A \subseteq B$ *con* $d(A) = \alpha$. *Questo non vale in generale se l'ipotesi è* $\overline{d}(B) = \alpha$.

Proof. Costruiamo A decidendo quali naturali prendere uno alla volta. Prendiamo 1 se $1 \in B$ e lo scartiamo altrimenti. In generale, prendiamo n se $n \in B$ e $|(A \cup \{n\}) \cap [n]|/n \leq \alpha$, lo scartiamo altrimenti.

Chiaramente $\overline{d}(A) \geq \alpha$ perché questo è vero ad ogni passo. Resta da vedere $\underline{d}(A) \geq \alpha$, ovvero che $\forall \epsilon > 0$ esistono naturali n arbitrariamente grandi per cui

$$|(A \cup \{n\}) \cap [n]| \geq \alpha - \epsilon.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così, ovvero che esista $\epsilon > 0$ per cui definitivamente $|(A \cup \{n\}) \cap [n]| < \alpha - \epsilon$. Per come abbiamo costruito A, questo significa che da un certo punto in poi siamo obbligati a prendere tutti gli elementi di B. In altre parole, A e B differirebbero per un insieme finito, e dunque avrebbero la stessa densità inferiore α (per un lemma precedente), assurdo.

La proprietà non vale in generale con la densità superiore. Infatti se $\overline{d}(B) = \alpha$ e $\exists A \subseteq B$ con $d(A) = \alpha$, necessariamente $\underline{d}(B) \geq \underline{d}(A) = d(A) = \alpha$, ovvero anche B dovrebbe avere densità e $d(B) = \alpha$. □

0.2 Pushforward

Esercizio 5. *Sia $f : I \to J$ e sia U un ultrafiltro su I. Dimostrare che*

1. *$f_*(U)$ è un ultrafiltro su J.*
2. *$f_*(g_*(U)) = (f \circ g)_*(U)$.*
3. *$f \equiv_U g \Rightarrow f_*(U) = g_*(U)$. Se f è iniettiva vale il viceversa.*
4. *Se $I = J$, $f_*(U) = U \Rightarrow f \equiv_U id$.*

Proof.

1. $\emptyset \notin f_*(U)$ perché $\emptyset = f^{-1}(A) \Rightarrow A = \emptyset \notin U$. Se $B \supseteq A \in f_*(U)$ allora $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(A) \in U$ e quindi $B \in f_*(U)$. Se $A, B \in f_*(U)$ allora $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in U$. Se $A^c \notin f_*(U)$ allora $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \notin U$, quindi $f^{-1}(A) \in U$.
2. $A \in f_*(g_*(U)) \iff g^{-1}(f^{-1}(A)) \in U \iff (f \circ g)(A) \in U \iff A \in (f \circ g)_*(U)$.
3. Bisogna vedere che $\forall A \subseteq I$ $f^{-1}(A) \in U \iff g^{-1}(A) \in U$. Sia $X = \{i \in I | f(i) = g(i)\} \in U$. Allora $f^{-1}(A) \in U \iff f^{-1}(A) \cap X \in U$ e $g^{-1}(A) \in U \iff g^{-1}(A) \cap X \in U$, ma $f^{-1}(A) \cap X = g^{-1}(A) \cap X$. Affrontiamo il viceversa quando f è iniettiva dopo il punto seguente.
4. Sia per assurdo $X = \{x \in I : f(x) \neq x\} \in U$. $f^{-1}(X) = X$, dunque ponendo $g = f_{|X}$ abbiamo $g : X \to X$ senza punti fissi. Possiamo allora decomporre $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (unione disgiunta) con $g(C_i) \cap C_i = \emptyset$. Esiste i tale che $C_i \in U$, ma allora $g(C_i) \notin U$, assurdo.

   Ora se nel punto precedente f è iniettiva, basta prendere h tale che $h \circ f = id$ e allora $f_*(U) = g_*(U) \Rightarrow h_*(f_*(U)) = h_*(g_*(U)) \Rightarrow U = (h \circ g)_*(U)$, da cui $h \circ g \equiv_U id$. Allora $\{f(x) = g(x)\} \supseteq \{h(f(x)) = h(g(x))\} = \{x = h(g(x))\} \in U$ da cui la conclusione.

□

0.3 Ultrafiltri selettivi

Esercizio 6. *Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Sono equivalenti:*

1. *$\mathfrak{U}$ è selettivo, cioè $\forall \mathbb{N} = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$ con $A_k \notin \mathfrak{U}$ esiste $X \in \mathfrak{U}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$ $|X \cap A_k| = 1$.*

2. *$\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ f è $\mathfrak{U}$-quasi ovunque costante oppure f è $\mathfrak{U}$-quasi ovunque iniettiva.*

3. *$\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ debolmente crescente e tale che $f \equiv_{\mathfrak{U}} g$.*

4. *$\mathfrak{U}$ è RK-minimale tra gli ultrafiltri non principali.*

5. *Vale la proprietà di Ramsey: $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \coprod \cdots \coprod C_r \to \exists A \in \mathfrak{U}$ tale che $[A]^2 \subseteq C_i$.*

Proof. $1 \Rightarrow 2$**:** $\mathbb{N} = \coprod_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\{k\})$. Se esiste k tale che $f^{-1}(\{k\}) \in \mathfrak{U}$ allora f è costante $\mathfrak{U}$-quasi ovunque. Se invece $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{-1}(\{k\}) \notin \mathfrak{U}$, l'ipotesi dà $X \in \mathfrak{U}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N} |X \cap f^{-1}(\{k\})| = 1$. Su tale $X \in \mathfrak{U}$ dunque f è iniettiva.

$2 \Rightarrow 1$**:** se $\mathbb{N} = \coprod_k A_k$, sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che manda gli elementi di A_k in k. Sia per l'ipotesi g iniettiva U-quasi ovunque uguale a f. L'insieme X candidato è $X = \{n | f(n) = g(n)\} \in U$. Certamente $|X \cap A_k| \leq 1$: occorre solamente aggiungere a X dei punti degli A_k che non lo toccano.

$2 \Rightarrow 3$**:** se f è costante quasi ovunque si può prendere $g = f$. Altrimenti, sia $X \in \mathfrak{U}$ tale che $f_{|X} : X \to \mathbb{N}$ è iniettiva. Ci basta definire g su X (poi la poniamo costante a tratti sui punti mancanti e resta debolmente crescente).

$2 \Rightarrow 4$**:** partiamo da una semplice osservazione

Osservazione 0.2. Sia $f : I \to J$, U ultrafiltro non principale su I. Allora $f_*(U)$ è principale se e solo se f è U-quasi ovunque costante.

Infatti se f è uguale a $j \in J$ su $X \in U$, $f_*(U) \in A \iff f^{-1}(A) \in U \iff f^{-1}(A) \cap X \in U$, ma $f^{-1}(A) \cap X$ è vuoto (se $j \notin A$) oppure $\{j\}$ (se $j \in A$), dunque $\iff j \in A$.

D'altra parte, se $f_*(U)$ è principale, relativo ad un certo $j \in J$, si ha $f^{-1}(A) \in U \iff j \in A$. Per $A = \{j\}$ otteniamo $f^{-1}(\{j\}) = \{x \in I : f(x) = j\} \in U$.

Supponiamo $U = f_*(V)$. Per l'ipotesi e l'osservazione esiste $X \in U$ tale che $f_{|X} : X \to \mathbb{N}$ è iniettiva. Posto $Y = f(X)$, f si restringe ad una bigezione $g : X \to Y$. Ma allora si ha $U = g_*^{-1}(V)$, cioè $U \leq_{RK} V$.

$4 \Rightarrow 2$**:** sia f tale che $V = f_*(U)$. Esiste allora g bigettiva tale che $g_*(U) = V = f_*(U)$ e siccome g è in particolare iniettiva si ha $f \equiv_U g$ (esercizio precedente).

$5 \Rightarrow 3$**:** Prendiamo $C_1 := \{\{i, j\} | f(i) \leq f(j)\}$ e C_2 il complementare. Non può esistere un insieme infinito omogeneo in C_2 perché non esiste $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ decrescente su un insieme infinito.

$3 \Rightarrow 1$**:** Sia $\mathbb{N} = \coprod_k A_k$. Definiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che manda A_k in k. f è non decrescente su $X \in U$. $X \cap A_k$ è finito. Sia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione che a $x \in X \cap A_n$ associa $|\{y \in A \cap A_n | y > x\}|$ ed è 0 su $\mathbb{N} \setminus X$. Preso $Y \in U$ dove questa è debolmente crescente, $|X \cap Y \cap A_n| \leq 1$, quindi $= 1$ a meno di aggiungere alcuni elementi se necessario.

$1, 2, 3, 4 \Rightarrow 5$**:** prossimamente.

$\square$

0.4 Lo spazio degli ultrafiltri

Esercizio 7. $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ *è un discreto denso.*

Proof. In generale, se $A \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathfrak{U} \in \beta\mathbb{N}$, $A \in U \iff U \in \mathcal{O}_A$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $U = U_n$ è ultrafiltro principale, questo dice $U \in \mathcal{O}_A \iff n \in A$. Dunque ogni O_A interseca $\mathbb{N}$ (in effetti in infiniti punti). D'altra parte dati $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$, preso $A = \{m\}$ si ha $U_m \in \mathcal{O}_A$ ma $U_n \notin \mathcal{O}_A$. $\square$

Esercizio 8. *Lo spazio* $\beta\mathbb{N}$ *ha cardinalità* 2^c.

Proof. Siccome $\beta\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, è chiaro che $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^c$.

Diamo una dimostrazione di $\geq$ tramite proprietà universale della compattificazione di Stone-Cech. Ci serve un lemma topologico.

Lemma 0.3. *Prodotto di* $\leq c$ *spazi separabili è separabile.*

Proof. Sia $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ con X_α separabile e $|A| \leq c$. In X_α sia $\{d_{\alpha,i}\}_i$ un denso numerabile. Possiamo pensare $A \subseteq [0,1] = I$. Per ogni scelta $J_1, \ldots, J_k \subseteq I$ di intervalli chiusi disgiunti con estremi razionali e per ogni scelta $n_1, \ldots, n_k$ di interi positivi, definiamo $f(J_1, \ldots, J_k; n_1, \ldots, n_k)$ ponendolo uguale a d_{α,n_i} se $\alpha \in J_i$, uguale a $d_{\alpha,1}$ altrimenti. L'insieme di punti $D \subseteq X$ così definito è numerabile. Inoltre è denso. Infatti se

$$B = \pi_{\alpha,1}^{-1}(U_{\alpha,1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha,m}^{-1}(U_{\alpha,m})$$

è un aperto della base, U_{α_i} contiene un punto $d_{\alpha_i,n_i} \in D_{\alpha_i}$ per ogni i e ci sono intervalli chiusi disgiunti ad estremi razionali $J_1, \ldots J_m$ contenenti i punti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ rispettivamente. Il punto $f(J_1, \ldots, J_k; n_1, \ldots, n_k)$ sta in B. $\square$

Per il lemma $\{0,1\}^c$ è separabile. Sia X un sottoinsieme denso e numerabile. Presa $\mathbb{N} \to X$ suriettiva, questa si estende ad una mappa suriettiva (e continua) $\beta\mathbb{N} \to X$. Questo conclude la dimostrazione.

$\square$