Esercizio

$\{A \mid A$ è $\Delta^*\} = \Delta^*$ è un filtro.

Soluzione

- $\mathbb{N} \in \Delta^*$
- Se $A \in \Delta^*$ e $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, allora, a maggior ragione, B interseca tutti i $\Delta(X)$ con X infinito.

Se $A, B \in \Delta^*$ allora $A \cap B \in \Delta^*$. Bisogna usare la P.R. dei Δ-set.

Se X è infinito, voglio che $A \cap B \cap \Delta(X)$ sia non vuoto. Considero:

$$\Delta(X) = (A \cap \Delta(X)) \sqcup (A^c \cap \Delta(X))$$

Per P.R. dei Δ-set almeno uno dei due è un Δ-set. Se, per assurdo non lo fosse $A \cap \Delta(X)$, allora $A^c \cap \Delta(X)$ è un Δ-set e $A \cap A^c \cap \Delta(X) \neq \emptyset$. Assurdo. Quindi $A \cap \Delta(X)$ è un Δ-set e quindi $B \cap A \cap \Delta(X) \neq \emptyset$.

Esercizio

Trovare $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\bar{d}(A) = 0$ e $BD(A) = 1$.

Soluzione

Sto cercando qualcosa che abbia intervalli arbitrariamente lunghi ma (sempre più) sparsi. Quindi, ad esempio:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n+1, 2^n+n] = \{3, 5, 6, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 20, 33, \dots\}$$

Vediamo infatti che: $\forall n \ \max_{x \in \mathbb{N}} |A \cap [x, x+n)| = n$ e quindi $BD(A) = 1$ e invece

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n} \leq \limsup_{m \to \infty} \frac{|A \cap [1, 2^m]|}{2^m} = \limsup_{m \to \infty} \frac{\frac{1}{2} m(m-1)}{2^m} = 0$$

Esercizio

$BD(A) = 1 \iff A$ è spesso

Soluzione

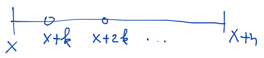
$\boxed{\Leftarrow}$ Se $\forall n \ \exists x$ t.c. $[x, x+n) \subseteq A$ allora $\max_{x \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [x, x+n)|}{n} = 1 \ \forall n$

$\boxed{\Rightarrow}$ Se $\lim_{n \to \infty} \max_{x \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [x, x+n)|}{n} = 1$ allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n > n_\varepsilon$

$$\max_{x \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [x, x+n)|}{n} > 1 - \varepsilon$$

se sto cercando un intervallo lungo k contenuto in A allora, posto $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e $n > n_\varepsilon$, ho che se per assurdo $A \cap [x, x+n)$ non contenesse intervalli di lunghezza k, ci sarebbero almeno $\frac{n}{k}$ elementi tra x e $x+n$ che non appartengono ad A:

Nota
forse $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
ma si sistema...



Allora $\max_{x \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [x, x+n)|}{n} \le \frac{n - \frac{n}{k}}{n} = 1 - \frac{1}{k} = 1 - \varepsilon$. Assurdo.

Esercizio

Se $A \cap B = \emptyset$

$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \le \underline{d}(A \cup B) \le \underline{d}(A) + \bar{d}(B) \le \bar{d}(A \cup B) \le \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$

Sol

$\underline{d}(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$ e $\underline{d}(A) = \alpha \iff \alpha = \min \left\{ st\left(\frac{|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu} \right) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \right\}$

$\bar{d}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$ e $\bar{d}(A) = \alpha \iff \alpha = \max \left\{ st\left(\frac{|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu} \right) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \right\}$

Allora, per un certo $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, si ha:

1) $\underline{d}(A \cup B) = st\left(\frac{|{}^*(A \cup B) \cap [1,\nu]|}{\nu} \right) \overset{A \cap B = \emptyset}{=} st\left(\frac{|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu} \right) + st\left(\frac{|{}^*B \cap [1,\nu]|}{\nu} \right) = \star$

ma $\underline{d}(A) = \min \{ st(\quad) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \}$

e quindi $\star \ge \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$

2) idem per $\bar{d}(A \cup B) \le \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$

3) MANCA.

Esercizio

TFAE

1) A è spesso.

2) $\exists I \subseteq {}^*A$ intervallo infinito (cioè $I = [\nu, \mu]$ dove $\mu - \nu$ è infinito).

3) $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}$ $\exists |I| = \nu$ intervallo di lunghezza ν con $I \subseteq {}^*A$.

4) $\exists \xi \in {}^*\mathbb{N}$ t.c. $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Soluzione

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ La proprietà "A è spesso" si esprime al prim'ordine come:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall m, p \in A \ \left[(\forall q \ \ m < q < p \Rightarrow q \in A) \Rightarrow p - m < n \right]$$

Questo implica

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m, p \in A \ \left[(\forall q \ \ m < q < p \Rightarrow q \in A) \wedge p - m = n \right]$$

Dunque, per transfer, ho:

$$\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \ \exists \mu, \pi \in {}^*A \ \left[(\forall \xi \ \ \mu < \xi < \pi \Rightarrow \xi \in {}^*A) \wedge \pi - \mu = \nu \right]$$

ovvero 3).

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ ovvio

$\boxed{2 \Rightarrow 4}$ So che esiste l'intervallo $I = (\mu, \nu) \subseteq {}^*A$ tale che $\nu - \mu$ infinito.
Dico che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu + n \in {}^*A$. Se così non fosse e per un certo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ $\mu + \bar{n} \notin {}^*A$, allora $\nu < \mu + \bar{n}$ e $\nu - \mu < \mu + \bar{n} - \mu = \bar{n}$ che non è infinito.
Assurdo.

$\boxed{4 \Rightarrow 2}$ L'insieme $B = \{\nu \mid \xi + \nu \in {}^*A\}$ è interno ed è un soprainsieme di $\mathbb{N}$, quindi per overspill $\exists \mu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tale che $[1, \mu] \subseteq B$. Allora $[\xi, \mu] \subseteq {}^*A$ e $\mu - \xi \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Se A non fosse spesso allora $\exists n \in \mathbb{N}$ $\forall$

MANCA

Esercizio

TFAE:

1) B è sindetico

2) $^*B$ non ha buchi infiniti, cioè $\forall I$ intervallo infinito $I \cap B \neq \emptyset$

3) $\exists k \in \mathbb{N}$ $^*B$ ha solo buchi di ampiezza $\leq k$.

4) $\forall \xi$ $A_\xi \neq \emptyset$.

Soluzione

Sono tutte ovvie per lo scorso esercizio.

Esercizio

$A \subseteq \mathbb{Z}$ sindetico sse $\exists F \subseteq \mathbb{Z}$ finito t.c. $A + F = \mathbb{Z}$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$ Se, per assurdo, $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito $A + F \subsetneq \mathbb{Z}$, allora, preso $d \in \mathbb{N}$ e

$F = \{0, 1, \dots, d\}$ ho che $\exists z \in \mathbb{Z}$ t.c. $z \neq a + 0, \dots, z \neq a + d$ $\forall a \in A$.

Dunque in A c'è un buco lungo almeno d per ogni $d \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $d = \max\{f : f \in F\}$. Allora i buchi di A sono limitati da d:

Se, per assurdo, ci fosse un buco lungo $e > d$, sia

$$z+1, \dots, z+d, \dots, z+e \notin A$$

Allora non esistono alcun $a \in A$ e $f \in F$ tali che $z + e = a + f$. Assurdo.

ES

$A \subseteq \mathbb{Z}$ spesso sse $\forall F$ finito $\exists x$ $x + F \subseteq A$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$ Se, per assurdo, esiste F finito t.c. $\forall x \in \mathbb{Z}$ $\exists f \in F$ $x + f \notin A$, allora

detto $d = \max\{f \mid f \in F\}$, ho che gli intervalli di A non possono essere più

lunghi di d.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se, per assurdo, A non è spesso allora esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che

per ogni intervallo $I \subseteq A$ $|I| < d$. Se però considero $F = \{0, \dots, d\}$ ottengo

$\exists x \in \mathbb{Z}$ $x + F \subseteq A \iff \forall i = 0, \dots, d$ $x + i \in A$. Assurdo.

Esercizio

La caratterizzazione non-standard di sindetica a tratti è

"$\exists I$ infinito t.c. ${}^*A \cap I$ non ha buchi infiniti".

Soluzione

$\Rightarrow$ Se A è sindetica a tratti, allora $A = S \cap P$, con S sindetico e P spesso. Ma allora ${}^*S$ non ha buchi infiniti e ${}^*P$ ha un intervallo infinito I. Quindi ${}^*A \cap I = {}^*S \cap {}^*P \cap I = {}^*S \cap I$ e ${}^*S$ non ha buchi infiniti.

$\Leftarrow$ MANCA

Esercizio

$\leq_{RK}$ non ha elementi massimali.

Soluzione

Chiaramente gli ultrafiltri principali non sono massimali. Sia dunque $\mathcal{U}$ non principale. Vedo che $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, in quanto

$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m,n) = m$ è tale che $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow f^{-1}(A) = A \times \mathbb{N} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$

Inoltre si vede che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq_{RK} \mathcal{U}$, infatti, se per assurdo esistesse $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ tale che $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, allora $f_* g_* \mathcal{U} = f_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Ora, se $A \in \mathcal{U}$, $g(A) \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ perché $g(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \mid (g(A))_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ ma $(g(A))_n = \{m \mid (n,m) \in g(A)\} = \{m \mid g^{-1}(n,m) \subset A\}$ e, visto che $f_* g_* \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ho che $\{m \mid (n,m) \in g(A)\} = \{h \cdot g(n)\}$ con $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $h(n,m) = m$. Quindi $(g(A))_n$ è un singoletto, ma $\mathcal{U}$ è non principale. Assurdo.

Esercizio

Se $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \bar{A} = O_A$

Soluzione

Identifichiamo A con l'insieme degli ultrafiltri principali $A = \{\mathcal{U}_n \mid n \in A\}$. Ora, essendo clopen, $O_A = \overline{O_A}$ e quindi ci basta vedere che $A \subseteq O_A$, cioè che $\forall n \in A$ $A \in \mathcal{U}_n$. Ma questo è ovvio perché $A \supseteq \{n\}$. D'altro canto, se $A \subseteq C$ con C chiuso, bisogna vedere che $O_A \subseteq C$. Poiché C è —

chiuso e gli O_{A_i} sono una base di clopen, si ha $C = \bigcap_{i \in I} O_{A_i}$.
Mi basta dunque vedere che $O_A \subseteq \bigcap_{i \in I} O_{A_i}$, ovvero che $\forall \mathcal{U}$ $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A_i \in \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$. Ma questo succede sse $A \subseteq A_i$ $\forall i$. Se così non fosse ed esistesse $a \in A$ t.c. $\mathcal{U}_a \notin A_i$, allora $\mathcal{U}_a \notin C$, ma questo è assurdo perché $A \subseteq C$.

Esercizio

1) C clopen $\Leftrightarrow C = O_A$, $A \subseteq \mathbb{N}$

2) $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ aperto $\Rightarrow \bar{U} = O_{U \cap \mathbb{N}}$

3) A intorno di $\mathcal{U} \Rightarrow A \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$

Soluzione

1) Che O_A sia clopen lo sappiamo già. Se B è clopen allora $B = \bigcup_{i \in I} O_{A_i}$ e $B = \bigcap_{j \in J} O_{A_j}$. Inoltre B è un chiuso di $\beta\mathbb{N}$, che è compatto, e quindi è compatto. Allora $B = \bigcup_{i_n \in \bar{I}} O_{A_{i_n}}$ con $\bar{I} \subseteq I$ finito. Ma $O_{A \cup B} = O_A \cup O_B$ e quindi $B = O_{\cup A_{i_n}}$.

2) Questo punto è molto simile allo scorso esercizio: $U \subseteq O_{U \cap \mathbb{N}}$ perché $U = \bigcup_{i \in I} O_{A_i}$ e se $\mathcal{V} \in U$ allora $A_i \in \mathcal{V}$ per qualche i. Inoltre $A_i \subseteq U \cap \mathbb{N}$ e quindi, poiché $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{V}$. Ora, se C è chiuso e $U \subset C$, posso di nuovo scrivere $C = \bigcap_{j \in J} O_{C_j}$ e vedere che se per assurdo $\mathcal{U}_a \in U \cap \mathbb{N}$ e $\mathcal{U}_a \notin C_j$, allora $\mathcal{U}_a \notin C$. Ma $U \subset C$, assurdo.

3) Sia A aperto di $\beta\mathbb{N}$ t.c. $\mathcal{U} \in A \subseteq U$. Allora, per 2) $\bar{A} = O_{A \cap \mathbb{N}}$ e $A \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Ma $U \cap \mathbb{N} \supseteq A \cap \mathbb{N}$ e quindi $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Esercizio

Sia $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la funzione somma, allora $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = S(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$

Soluzione

$A \in S(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \Leftrightarrow S^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid (S^{-1}(A))_n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ con

$$(S^{-1}(A))_n = \{m \mid (m,n) \in S^{-1}(A)\} = \{m \mid S(m,n) \in A\} = \{m \mid m+n \in A\} = A-n$$

Esercizio

$\forall \mathcal{U}$ non-principale, $\theta_{\mathcal{U}} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non è continua.

Soluzione

Sappiamo che $\oplus$ non è commutativa e in particolare che il suo centro sono tutti e soli gli ultrafiltri principali. Quindi $\exists \mathcal{V}$ t.c. $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V} \neq \mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$ e, poiché $\beta\mathbb{N}$ è di Hausdorff esistono due intorni disgiunti di $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}$, siano U e V. Se, per assurdo, $\theta_{\mathcal{U}}$ fosse continua si avrebbe $\mathcal{V} = \theta_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}) = \psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{V}\oplus\mathcal{U})$ e $\theta_{\mathcal{U}}^{-1}(U)$ e $\psi_{\mathcal{V}}^{-1}(V)$ sarebbero due suoi intorni aperti. MANCA.

Esercizio

$\mathcal{U} \odot \mathcal{V} = P(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$, $P : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ prodotto.

Soluzione

$A \in P(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}) \Leftrightarrow P^{-1}(A) \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid (P^{-1}(A))_n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ con

$$(P^{-1}(A))_n = \{m \mid (m,n) \in P^{-1}(A)\} = \{m \mid m\cdot n \in A\} = \frac{A}{n}$$

Esercizio

$\exists \mathcal{W}$ t.c. $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{U}\ \exists m\ A-m \in \mathcal{U}$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$ Si ha $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{W}$. Se, per assurdo, $\forall n\ A-n \notin \mathcal{U}$ allora si avrebbe $\emptyset \in \mathcal{W}$. Assurdo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Vorrei costruire $\mathcal{W}$ a partire da $\mathcal{U}$, come $\mathcal{W} = \{A-m \mid A \in \mathcal{U}\}$ ma

MANCA.

Esercizio

$\mathcal{U}$ è idempotente $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{U}\ \exists a \in A\ A-a \in \mathcal{U}$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$ Si ha $\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Se, per assurdo, $\forall a \in A\ A-a \notin \mathcal{U}$ allora $\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \subseteq A^c$ e quindi $\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{U}$. Assurdo.

$\boxed{\Leftarrow}$ MANCA

Esercizio

$\mathcal{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \in {}^*A\}$ è un ultrafiltro idempotente $\Leftrightarrow$ Se $\alpha \in {}^*A$ allora anche $\alpha + a \in {}^*A$ per un opportuno $a \in A$

Soluzione

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}_\alpha$ è idempotente, quindi: $\alpha \in {}^*A \Leftrightarrow \alpha \in {}^*\{n \mid \alpha \in {}^*(A-n)\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha \in {}^*\{n \mid \alpha + n \in {}^*A\}$. Se, per assurdo, per ogni $a \in A$ $\alpha + a \notin {}^*A$, allora $\{n \mid \alpha + n \in {}^*A\} \subseteq A^c$ e quindi ${}^*\{n \mid \alpha + n \in {}^*A\} \subseteq {}^*(A^c) = ({}^*A)^c$. Allora $\alpha \in {}^*A \Leftrightarrow \alpha \in ({}^*A)^c$. Assurdo.

$\boxed{\Leftarrow}$ MANCA.

ES

$\mathcal{U}$ non principale su $\mathbb{N}$, TFAE:

1) $\mathcal{U}$ è $\leq_{RK}$-minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

2) $\mathcal{U}$ è selettivo ($\forall\, \mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \notin \mathcal{U} \to \exists X \in \mathcal{U}$ $\forall k$ $|X \cap A_k| = 1$)

3) $\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ è costante o iniettiva

4) ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = \{[f] \mid f$ costante o bigezione$\}$

5) $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ infinitesimo $\to$ esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona infinitesima t.c. $[f] = \varepsilon$

6) Ogni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una g non decrescente.

7) $\mathcal{U}$ è di Ramsey, cioè $\forall\, [\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \_ \cup C_2 \to \exists H \in \mathcal{U}$ t.c. H monocromatico.

Soluzione

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ MANCA

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Considero $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(n)$. Se $\exists n$ t.c. $f^{-1}(n) \in \mathcal{U}$ allora $A = f^{-1}(n)$ e $f_{|A}$ è costante. Altrimenti, per selettività, $\exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $\forall n$ $|X \cap f^{-1}(n)| = 1$ e quindi $f_{|X}$ è iniettiva.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Bisogna vedere che per ogni funzione $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ costante o iniettiva tale che $f \equiv_{\mathcal{U}} g$. Ma $\exists A \in \mathcal{U}$ tale che

$g|_A$ è costante o iniettiva. Nel primo caso, sia f costantemente uguale al valore che prende su A e nel secondo caso MANCA.

Esercizio

Se $\mathcal{U}$ è idempotente allora $k \cdot \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ per ogni k.

Soluzione

Fisso k. Ho che $k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ equivale a chiedere $k\mathbb{N} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ ovvero $\{n \mid k\mathbb{N} - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, dove $k\mathbb{N} - n = \{m \mid n+m \in k\mathbb{N}\}$. Ora detto

$\Lambda_i^k = \{m \mid m \equiv -i \mod k\}$ ho che

$$\mathcal{U} \ni \mathbb{N} = \Lambda_0^k \sqcup \dots \Lambda_{k-1}^k$$

Da cui $\exists! j$ tale che $\Lambda_j^k \in \mathcal{U}$. Ora, noto che

$$m+n \in k\mathbb{N} \iff m \equiv -n \mod k \iff m \in \Lambda_n^k$$

Quindi $k\mathbb{N} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \iff \{n \mid \Lambda_n^k \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, ma io so che $\Lambda_i^k \in \mathcal{U} \iff i \equiv -j \mod k$ ovvero se e solo se $i \in \Lambda_j^k$. Dunque $k\mathbb{N} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \iff \Lambda_j^k \in \mathcal{U}$, e questo è vero.