Esercizio 20. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $\mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Allora $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ se e solo se $\{ n \mid f(n) = n \} \in \mathcal{U}$.

Soluzione. $\Leftarrow$) Sia $A \in f(\mathcal{U})$. Allora $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ e $f^{-1}(A)^C \notin \mathcal{U}$, da cui $f^{-1}(A^C) \notin \mathcal{U}$. Ma allora $A^C \notin f(\mathcal{U})$ e $A \in \mathcal{U}$. Viceversa, sia $A \in \mathcal{U}$ e siano

$$A_f = A \cap \{ n \mid f(n) = n \} \in \mathcal{U} \quad A_m = A \setminus A_f \notin \mathcal{U}.$$

Allora $f^{-1}(A) = f^{-1}(A_f) \cup f^{-1}(A_m) \supseteq A_f \in \mathcal{U}$, da cui $A \in f(\mathcal{U})$. $\Rightarrow$) Sia $B = \{ n \mid f(n) = n \}$ e sia $C = B^C$. Suppongo che $C \in \mathcal{U} = f(\mathcal{U})$; allora $f^{-1}(C) \in \mathcal{U}$. Poiché $f^{-1}(C) \cap B = \emptyset$ (la controimmagine di un punto non fisso non può essere un punto fisso), si ha $f^{-1}(C) \subseteq C$. Sia $X = C \setminus f^{-1}(C)$. Fisso $a \in f^{-1}(C)$ e definisco $\tilde{f}\colon C \to C$ tale che

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} a \text{ se } x \in X \\ f(x) \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

la mappa $\tilde{f}$ è una funzione senza punti fissi e dunque per il teorema dei tre colori esiste una colorazione $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ tale che $(x, \tilde{f}(x))$ sia sempre bicromatica. Poiché $C \in \mathcal{U}$, uno dei tre insiemi della partizione deve appartenere all'ultrafiltro. Suppongo ad esempio che $A_1 \in \mathcal{U}$; per ipotesi dunque $f^{-1}(A_1) \in \mathcal{U}$. Ma $f(A_1) \cap A_1 = \emptyset$, da cui $f(A_1) \notin \mathcal{U}$ e pertanto anche $f^{-1}(f(A_1)) \notin \mathcal{U}$. Ciò però è assurdo in quanto $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

Esercizio 21 (Underspill)**.** Dimostrare:

1. Se un insieme A interno contiene ipernaturali infiniti arbitrariamente piccoli, allora contiene ipernaturali finiti.
2. Se $\forall \xi$ infinito $[\xi, +\infty) \subseteq A$ con A interno, allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $[n, +\infty) \subseteq A$.

Soluzione. 1. Ogni insieme interno di ipernaturali ammette elemento minimo; tale minimo non può essere un ipernaturale infinito perché per ipotesi l'insieme A contiene ipernaturali infiniti arbitrariamente piccoli.
2. Considero l'insieme $B = \{ \nu \in {}^\star N \mid [\nu, +\infty) \subseteq A \}$. B è un insieme interno e per ipotesi contiene ipernaturali infiniti arbitrariamente piccoli. Per quanto detto in precedenza, B contiene un ipernaturale finito n, cioè $[n, +\infty) \subseteq A$.

Esercizio 22. Se A è interno e $\forall \varepsilon \sim 0$ si ha $[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq A$, allora $\exists r > 0$ tale che $[-r, r] \subseteq A$.

Soluzione. Segue dalle proprietà di underspill poiché ciò implica che $\left\{ \xi \mid \xi^{-1} \in A \right\}$ contiene $[\xi, +\infty)$ per ogni ξ infinito.

Esercizio 23. Sono equivalenti i seguenti fatti:

1) A è spesso;

2) $\exists I \subseteq {}^\star A$ intervallo infinito (cioè $I = [\nu, \mu]$ con $\mu - \nu$ infinito);

3) $\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}$ $\exists I$ intervallo di lunghezza ν con $I \subseteq {}^\star A$;

4) $\exists \xi \in {}^\star\mathbb{N}$ tale che $\xi + n \in {}^\star A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, cioè $A_\xi = \{ n \in \mathbb{N} \mid \xi + n \in {}^\star A \} = \mathbb{N}$.

Soluzione. $1 \Leftrightarrow 3$) Segue dalla proprietà di transfer.
$3 \Rightarrow 2$) Ovvio.
$2 \Rightarrow 1$) Se A non fosse spesso, allora conterrebbe intervalli di lunghezza limitata da un certo naturale k. Ma allora ${}^\star A$ non potrebbe contenere un intervallo infinito.
$2 \Rightarrow 4$) Se $I = [\nu, \mu] \subseteq {}^\star A$, allora $\nu < \nu + n < \mu$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e perciò $\nu + n \in {}^\star A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
$4 \Rightarrow 2$) Si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $[\xi, \xi + n] \subseteq {}^\star A$. Inoltre $\{ \nu \in {}^\star\mathbb{N} \mid [\xi, \xi + \nu] \subseteq {}^\star A \}$ è interno e contiene $\mathbb{N}$, dunque per overspill contiene μ infinito, cioè esiste un intervallo $[\xi, \xi + \mu]$ infinito contenuto in ${}^\star A$.

Esercizio 24. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Allora sono equivalenti:

1 $\mathcal{U}$ è $\leq$-minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, cioè se $\mathcal{V}$ non principale è tale che $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, allora $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$.

2 $\mathcal{U}$ è selettivo, cioè se $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è una partizione tale che $A_i \notin \mathcal{U}$ per ogni i, allora $\exists X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap A_i$ ha esattamente un elemento per ogni i.

3 $\forall f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f\restriction_A$ è costante oppure iniettiva.

4 Vale ${}^\star\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}\!/\!_{\mathcal{U}} = \{ [f]_\mathcal{U} \mid f$ è costante o una bigezione $\}$.

5 Se $\varepsilon \in {}^\star\mathbb{R}$ è un infinitesimo, allora $\exists f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona infinitesima tale che $[f]_\mathcal{U} = \varepsilon$.

6 $\forall f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione g non decrescente.

7 $\mathcal{U}$ è di Ramsey, cioè $\forall$ $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, allora $\exists H \in \mathcal{U}$ tale che $[H]^2$ è monocromatico.

Soluzione. (Incompleta) $1 \Rightarrow 4$) Considero $[f]_\mathcal{U} \in {}^\star\mathbb{N}$ non equivalente ad una costante. Allora $f(\mathcal{U}) \leq \mathcal{U}$ e $f(\mathcal{U})$ non è principale; infatti, se lo fosse, conterrebbe $\{k\}$ per qualche k e dunque $f^{-1}(k) \in \mathcal{U}$, contro l'ipotesi che f non sia equivalente a una costante. Allora $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$, cioè esiste una bigezione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$, cioè $\{ n \mid f(n) = \sigma(n) \} \in \mathcal{U}$ poiché σ è invertibile. Ne segue che f è equivalente a una bigezione.

$1 \Rightarrow 2$) Considero una partizione di $\mathbb{N}$ in infiniti insiemi $\{A_n\}$ non appartenenti all'ultrafiltro $\mathcal{U}$. Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(a) = n$ se $a \in A_n$. Noto che $f(\mathcal{U})$ non è un ultrafiltro principale; infatti, se esistesse un singoletto tale che $\{b\} \in f(\mathcal{U})$ allora $f^{-1}(b) = A_b \in \mathcal{U}$, assurdo. Dunque poiché $f(\mathcal{U}) \leq \mathcal{U}$ e non è principale, si ha che $f(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$ per minimalità di $\mathcal{U}$. Per quanto fatto sopra, f è equivalente ad una bigezione σ, ma f è suriettiva e pertanto $\{ n \mid f(n) = \sigma(n) \} = Y \in \mathcal{U}$ interseca ogni A_j in al più un punto. Pertanto esiste $X \supseteq Y$ tale che $X \in \mathcal{U}$ e $|X \cap A_j| = 1$ per ogni j.
$2 \Rightarrow 3$) Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e suppongo che per ogni $A \in \mathcal{U}$ $f\restriction_A$ non sia costante. Allora $\mathbb{N} = \cup f^{-1}(\{n\})$, dove l'unione è fatta sugli $n \in f(\mathbb{N})$. L'unione è infinita, altrimenti esisterebbe k tale che $f^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{U}$ e dunque f sarebbe costante su questo insieme. Per lo stesso motivo, ciascun $f^{-1}(\{n\})$ non appartiene ad $\mathcal{U}$. Pertanto per ipotesi esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $|X \cap f^{-1}(\{n\})| = 1$ per ogni $n \in f(\mathbb{N})$. In particolare $f\restriction_X$ è iniettiva.
$3 \Rightarrow 1$) Sia $\mathcal{V}$ non principale tale che $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, cioè $\exists f$ tale che $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$. Tale f non può essere costante su nessun insieme di $\mathcal{U}$; infatti, se così fosse, si avrebbe $A \in \mathcal{U}$ tale che $f(A) = n \in \mathbb{N}$ e dunque $f^{-1}(\{n\}) \supseteq A \in \mathcal{U}$ da cui $\{n\} \in \mathcal{V}$, cioè $\mathcal{V}$ sarebbe principale. Pertanto esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f\restriction_X$ è iniettiva. In particolare ciò induce una bigezione tra X e $f(X)$. Costruisco $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \in X \text{ se } x \in f(X) \\ 1 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Se dimostro che $g(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, allora avrei anche $\mathcal{U} = g(f(\mathcal{U})) \leq f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ e dunque $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$. Basta cioè dimostrare che $\{ n \mid g(f(n)) = n \} \in \mathcal{U}$, ma questo è vero perché è un soprainsieme di X.
$4 \Rightarrow 3$) Ogni funzione è equivalente secondo l'ultrafiltro ad una costante o a una bigezione, dunque è costante o iniettiva su un insieme appartenente ad $\mathcal{U}$.
$2, 3 \Rightarrow 6$) Se f è equivalente a una costante, la tesi è banale. Suppongo quindi che f non sia equivalente a una costante e dunque sia iniettiva su un insieme dell'ultrafiltro. In particolare $f(\mathbb{N})$ è infinito e la controimmagine di un punto è sempre finita; ciò comporta che la controimmagine di un intervallo sia finita e che $\forall k$ la funzione assuma definitivamente valori $> k$. Mi basta dunque trovare un insieme appartenente all'ultrafiltro su cui f sia strettamente crescente. Costruisco la successione:

$$\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_{k+1} = \min\nolimits_{n > a_k} \{ f(m) > f(l) \ \forall m > n \ \forall l \leq a_k \} \end{aligned}$$

Noto che

$$\min_{(a_{k+2}, a_{k+3}]} f(n) > \max_{(a_k, a_{k+1}]} f(n) \quad \forall k$$

come segue dalla definizione. Inoltre gli insiemi $A_0 = \{0\}$, $A_k = (a_k, a_{k+1}]$ per $k > 0$ formano una partizione di $\mathbb{N}$ e non appartengono ad $\mathcal{U}$. Dunque $\exists X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap A_j = \{x_j\}$, $x_j < x_{j+1}$ e $f(x_{j+2}) > f(x_j)$ per ogni j. In particolare f è strettamente crescente sui due sottoinsiemi $\{x_{2j}\}$ e $\{x_{2j+1}\}$ ed almeno uno di questi insiemi deve appartenere all'ultrafiltro.

$6 \Rightarrow 3$) Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e g una funzione non decrescente ad essa equivalente; sia $X = \{ n \mid f(n) = g(n) \} \in \mathcal{U}$. Se $g(\mathbb{N})$ è finito, cioè g è definitivamente uguale ad una costante c, allora $\{ n \mid f(n) = c \} \subseteq X \cap \{ n \mid g(n) = c \} \in \mathcal{U}$ e dunque f è equivalente ad una costante. Suppongo quindi che $g(\mathbb{N})$ sia infinito, in particolare g è costante su intervalli di lunghezza finita. Siano $A_1 = [0, a_1), A_2 = [a_1, a_2), \ldots$ tali intervalli (consecutivi) su cui g è costante, con $g(A_{k+1}) > g(A_k)$; allora $\mathbb{N} = \cup_n A_n$ e $A_j \notin \mathcal{U}$ per ogni j. Se trovo un insieme $X \in \mathcal{U}$ tale che $|X \cap A_j| \leq 1$, allora ho che $Y = \{ n \mid f(n) = g(n) \} \cap X \in \mathcal{U}$ ed f è strettamente crescente su Y, da cui la tesi. Definisco allora $\tilde{f}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\tilde{f}\restriction_{A_j}$ corrisponda alla permutazione degli elementi di A_j che li ordina in modo decrescente. Poiché per ipotesi è equivalente a $\tilde{g}$ non decrescente, l'insieme $X = \{n \mid \tilde{f}(n) = \tilde{g}(n)\}$ interseca ogni A_j in al più un punto.
$2, 3 \Rightarrow 5$) Sia $(a_n)_n$ una successione di reali infinitesima a cui corrisponde ε e posso supporre che non sia equivalente alla costante 0. Considero una successione di naturali b_k in questo modo:

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_{k+1} = \min\{k | a_m > \max_{0 \leq i \leq b_k}\{a_i\} \ \forall m \geq k\}. \end{cases}$$

Con un ragionamento analogo a quanto fatto sopra, si costruisce un insieme $X \in \mathcal{U}$ su cui la successione $(a_n)_n$ sia strettamente decrescente, da cui segue che $\varepsilon = [f]_{\mathcal{U}}$ con f infinitesima monotona.
$5 \Rightarrow 6$) Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e suppongo che f non sia equivalente a una costante. Come già osservato, la controimmagine di un intervallo ha cardinalità finita, quindi $\{ n \mid f(m) > k \ \forall m > n \}$ è non vuoto per ogni k fissato. Considero dunque $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $g(n) = f(n)^{-1}$ ($f^{-1}(0)$ è finita). Allora $[g]_{\mathcal{U}}$ è un infinitesimo e dunque posso supporre, a meno di $\mathcal{U}$-equivalenza, che g sia monotona non crescente. Ne segue che allora f è monotona non decrescente.

Esercizio 25. Dimostrare i seguenti fatti su $\beta\mathbb{N}$:

1. C clopen $\iff C = \mathcal{O}_A$ per un opportuno $A \subseteq \mathbb{N}$.
2. $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ è aperto $\Rightarrow \overline{U} = \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}}$.
3. Sia U un intorno di $\mathcal{U}$. Allora $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Soluzione. 1. L'implicazione verso sinistra è banale, essendo $\mathcal{O}_A$ aperto e chiuso. Viceversa, se C è aperto e chiuso, allora si può scrivere

$$C = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{A_i}.$$

Ma C è chiuso in un compatto e dunque è compatto, perciò sono sufficienti un numero finito di aperti per ricoprirlo, cioè

$$C = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{O}_{A_i}.$$

Infine, poiché vale $\mathcal{O}_{A\cup B} = \mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B$, si ha che $C = \mathcal{O}_A$ con $A = \cup_i A_i$, come voluto.
3. Se U è un intorno di $\mathcal{U}$, allora posso supporre $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A \subseteq U$ per qualche $A \in \mathcal{U}$. Dimostro che $A \subseteq U \cap \mathbb{N}$: questo implica che $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$ e dunque che $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Sia allora $n \in A$; su $\mathcal{U}_n$ è l'ultrafiltro principale generato da n, ciò implica che $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}_A \subseteq U$, cioè $\mathcal{U}_n \in U$, che significa $n \in U \cap \mathbb{N}$.
2. Dimostro prima che se $A \subseteq \mathbb{N}$, allora $\bar{A} = \mathcal{O}_A$. Sicuramente vale $\subseteq$. Suppongo che esista un chiuso $C = \cap_{i\in I}\mathcal{O}_{B_i}$ tale che $\bar{A} \subseteq C \subseteq \mathcal{O}_A$ e dimostro che allora $\mathcal{O}_A \subseteq C$; questo segue dal fatto che $A \subseteq B_i$ per ogni i. Sia dunque $n \in A$ (cioè $\mathcal{U}_n \in A$), allora $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}_{B_i}$ per ogni i poiché $A \subseteq C$, cioè $B_i \in \mathcal{U}_n$ per ogni i da cui $n \in \mathcal{B}_i$.
Sia ora $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ aperto. Si ha che, per densità di $\mathbb{N}$, $U \cap \mathbb{N}$ è denso in U e le loro chiusure in βN coincidono (perché U è aperto); pertanto $\overline{U} = \overline{U \cap \mathbb{N}} = \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$.