Esercizi lezione 27/3/15, Andrea Vaccaro

13 aprile 2015

Proposizione 0.1. *Verificare che $A \subseteq \mathbb{Z}$ è sindetico se e solo se esiste $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito tale che $A + F = \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Supponiamo A sindetico, e sia $k \in \mathbb{N}$ tale per cui gli intervalli non contenuti in A siano lunghi al più k. Sia allora $F = [-k, \cdots, k]$; se $n \in \mathbb{Z}$, allora esiste $a \in A$ tale che $|n - a| \leq k$, ma quindi esiste $l \in F$ tale che $n + l = a$, e segue la tesi.

Viceversa, se F è finito come in ipotesi, esisterà $k \in \mathbb{N}$ tale che $F \subseteq [-k, k]$, ma allora sia I intervallo disgiunto da A. Se fosse più lungo di $2k$, chiamando $x \in I$ tale che $|a - x| > k$ per ogni $a \in A$, non esisterebbero $f \in F$ e $b \in A$ tali che $b + f = x$, contro le ipotesi. Ma allora gli intervalli disgiunti da A sono limitati da $2k$, e segue la tesi.

$\square$

Proposizione 0.2. *$A \subseteq \mathbb{Z}$ è spesso se e solo se per ogni $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste x tale che $x + F \in A$.*

Dimostrazione. Sfruttando l'esercizio precedente e il fatto che A è spesso se e solo se A^C non è sindetico e si ottiene: A è spesso se e solo se A^c non è sindetico se e solo se per ogni $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito, chiamando $F' = \{-x : x \in F\}$, esiste x_F tale che $x_F \notin A^c + F'$ che equivale a dire che $x_F + F \subseteq A$, e segue la tesi.

Verifichiamo allora che A è spesso se e solo se A^c non è sindetico. Se A è spesso allora contiene intervalli arbitrariamente lunghi, dunque ci sono intervalli arbitrariamente lunghi disgiunti da A^c, che non può essere sindetico. Se A^c non è sindetico vuol dire che esistono intervalli arbitrariamente lunghi disgiunti da A^c, e dunque contenuti in A, che quindi è spesso. $\square$

Proposizione 0.3. *Mostrare che A è sindetico a tratti se e solo se esiste I intervallo infinito in ${}^*\mathbb{N}$ tale che ${}^*A \cap I$ ha buchi finiti.*

Dimostrazione. Sia A sindetico a tratti, dunque esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni n esiste un intervallo I_n di cardinalità n tale che $A \cap I_n$ abbia in I_n buchi lunghi al più k. Considero all'ora in ${}^*\mathbb{N}$ l'intervallo I definito come un insieme interno dalla successione $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tale intervallo è infinito per la definizione degli I_n. Consideriamo $\xi \in I \setminus {}^*A$, riusciamo dunque a trovarne un rappresentante $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\xi_n \in I_n \setminus A$. Possiamo ora partizionare $\mathbb{N}$ in k pezzi C_i dove definiamo $C_i = \{n : \xi_n + i \in A \wedge \xi_n + j \notin A \text{ se } j < i\}$. Abbiamo una partizione proprio perché A è sindetico a tratti. Ma allora esisterà $C_j \in U$, dunque $\xi + j \in {}^*A$, e quindi, vista la genericità di ξ, ogni buco è finito.

Viceversa sia I intervallo infinito tale che $I \cap {}^*A$ abbia buchi finiti in I. Poiché intervallo, I sarà della forma $[\mu, \nu]$, consideriamo allora gli intervalli $I_n = [\mu_n, \nu_n]$ (a meno di cambiare rappresentante possiamo sempre supporre $\mu_n < \nu_n$). Supponiamo $I \cap {}^*A$ abbia buchi finiti in I ma arbitrariamente grandi; dunque per ogni $k \in \mathbb{N}$ riesco a trovare $D_k \in U$ tale per cui $A \cap [\mu_i, \nu_i]$ abbia almeno un buco più lungo di k in I_i quando $i \in D_k$; chiameremo tale buco $J_{i,k}$. Costruiamo ora H interno a partire da una successione di sottoinsiemi $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ con $H_m \subseteq I_m \setminus A$ come segue: fissato D_1 definito come spiegato sopra, otterrò una successione di $J_{i,1}$ per $i \in D_1$, e similmente per ogni $m \in \mathbb{N}$ avremo una successione di $J_{i,m}$ con $i \in D_m$; fissato ora $i \in \mathbb{N}$, se non esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $i \in D_m$, definiamo H_i come un qualunque segmento di $I_i \setminus A$. In caso contrario, sia M il massimo degli m tali per cui $i \in D_m$ (l'insieme di tali m è certamente limitato dalla taglia di I_i), e definiamo quindi $H_i = J_{i,M}$. Quello che si verifica è che fissato $D_j \in U$, per $i \in D_j$ i vari H_i saranno tutti di lunghezza maggiore o uguale a j, si può quindi concludere che H è infinito, assurdo. Dunque i buchi saranno limitati da un certo numero naturale h. Poiché I è infinito, riusciremo a trovare sempre intervalli arbitrariamente grandi in $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e poiché $I_n \cap {}^*A$ avrà sempre buchi lunghi al più h in I_n, segue la tesi. $\square$