Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 30-31/3/15

Lemma 0.1. *Data una funzione $f : X \to X$ senza punti fissi, esiste una 3-colorazione di X tale che $\forall x \in X$ x ed $f(x)$ hanno colori diversi.*

Esercizio 0.1. $\mathcal{U} <_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ *($\mathcal{U}$ non principale).*

Dimostrazione. Supponiamo che ci sia $f : X \to X \times X$ tale che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$: considero la funzione $\pi_1 \circ f : X \to X$ (dove π_1 è la proiezione lungo la prima componente): usando il lemma sopra, posso partizionare X in $F \cup A \cup B \cup C$ dove $F := \{x : \pi_1(f(x)) = x\}$ e se $x \notin F$ allora x ed $f(x)$ stanno in insiemi diversi. Per proprietà di ultrafiltro, c'è esattamente un insieme tra F, A, B e C che sta in $\mathcal{U}$.
Se $F \in \mathcal{U}$ allora $f(F) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ quindi $\{x : \{y : (x, y) \in f(F)\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, ma per ogni x fissato $\{y : (x, y) \in f(F)\}$ contiene al più un elemento, quindi non sta in $\mathcal{U}$, e avrei $\emptyset \in \mathcal{U}$ che è assurdo.
Se $A \in \mathcal{U}$ (i casi B e C sono analoghi) allora $f(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ quindi si ha $\{x : \{y : (x, y) \in f(A)\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, ma $\pi_1(f(A)) \subseteq F \cup B \cup C$ quindi ho $\{x : \{y : (x, y) \in f(A)\} \in \mathcal{U}\} \subseteq F \cup B \cup C \notin \mathcal{U}$, che è assurdo. □

Esercizio 0.2.

- *Se $C \subseteq \beta\mathbb{N}$ è chiuso e aperto, esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $C = O_A$*
- *Se $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ è aperto, allora $\overline{U} = O_{U \cap \mathbb{N}}$*

Dimostrazione. Innanzitutto $O_X \subseteq O_Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$.

- C chiuso quindi si scrive come intersezione di chiusi della base; C aperto quindi si scrive come unione di aperti della base. Quindi esistono A_i e B_j ($i \in I$ e $j \in J$) sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ tali che $C = \bigcup_i O_{A_i} = \bigcap_j O_{B_j}$. Ora si ha che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $[n \in \bigcup A_i] \Leftrightarrow [\bigsqcup_n \in \bigcup O_{A_i}] \Leftrightarrow [\bigsqcup_n \in \bigcap_j O_{B_j}] \Leftrightarrow [n \in \bigcap B_j]$, quindi $\bigcup A_i = \bigcap B_j$. Dunque si ha $\bigcup O_{A_i} \subseteq O_{\bigcup A_i} = O_{\bigcap B_j} \subseteq \bigcap O_{B_j}$ quindi valgono le uguaglianze, cioè $C = O_{\bigcup A_i} = O_{\bigcap B_j}$
- Sia $U = \bigcup O_{A_i}$. Un chiuso della base O_B contiene $\bigcup O_{A_i}$ se e solo se $B \supseteq \bigcup A_i$. Quindi l'intersezione di tutti i chiusi che contengono U è l'intersezione di tutti i chiusi della base che contengono U, cioè $O_{\bigcup A_i}$; ora basta osservare che $\bigsqcup_n \in U \Leftrightarrow n \in \bigcup A_i$ quindi $O_{\bigcup A_i} = O_{U \cap \mathbb{N}}$

□

Esercizio 0.3. $|\beta\mathbb{N}| = 2^c$

Dimostrazione. Essendo $\beta\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ si ha $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^c$. Voglio ora trovare 2^c ultrafiltri distinti. Per far ciò costruisco c sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ in modo che per ogni scelta di una sottofamiglia di questi, valga la FIP tra [gli insiemi non scelti e i complementari di quelli scelti]; in questo modo, per ognuna delle 2^c scelte di quali passare al complementare, potrò costruire un ultrafiltro contenente [gli insiemi non scelti e i complementari di quelli scelti], ed a scelte diverse corrisponderanno ultrafiltri diversi.
Voglio associare ad ognuna delle successioni di 0 e 1 un insieme (le successioni di 0 e 1 sono c). Partiziono $\mathbb{N}$ in *zone* (*zona* 1, *zona* 2, ecc.): la k-esima zona è un intervallo che contiene un numero m associato ad ogni possibile *scelta* di [al più k stringhe di 0 e di 1, ciascuna lunga k, a due a due distinte, alcune delle quali con la scritta *complementare* davanti]; cioè sto associando ad ogni numero m nella *zona* k una siffatta *scelta*, e ad ogni siffatta *scelta* un numero m nella *zona* k. Notare che tali possibili scelte sono in numero finito, quindi ogni *zona* ha lunghezza finita.
Ora, data una successione s di 0 e 1, definisco il corrispondente sottoinsieme di $\mathbb{N}$ in questo modo: per decidere se l'insieme associato ad s contiene un certo numero m della *zona* k, guardo a che *scelta* è associato il numero m: considero la stringa data dai primi k caratteri di s e controllo se tale stringa compare nella *scelta* associata al numero m:
se tale stringa compare senza scritta *complementare*, allora m appartiene all'insieme associato ad s;
se tale stringa compare con la scritta *complementare*, allora m non appartiene all'insieme associato ad s;
infine, se tale stringa non compare nella *scelta* associata ad m, allora m non appartiene all'insieme associato ad s (in questo caso qualsiasi cosa andrebbe bene in realtà).
A questo punto ho definito l'insieme associato ad una determinata successione s. Controllo che ogni famiglia formata da un numero finito di questi insiemi e da un numero finito di loro complementari abbia intersezione non vuota. Associo ad ognuno di tali insiemi la rispettiva successione di 0 e 1, e scrivo *complementare* davanti a quelli che ho sostituito con il complementare. Ogni coppia di successioni avrà un primo carattere in cui sono distinte; le coppie di successioni sono in numero finito, quindi esiste k tale che [gli insiemi scelti sono in quantità $\leq k$] e [ogni coppia di successioni è diversa in almeno un bit entro i primi k]. Considero nella *zona* k il numero m associato alla *scelta* data dalle stinghe formate dai primi k caratteri di ognuna delle successioni relative agli insiemi della famiglia finita (con *complementare* scritto davanti alle stringhe relative agli insiemi di cui sto considerando il complementare): quel numero m è, per come ho definito gli insiemi, contenuto nell'intersezione voluta, in quanto appartiene ad un insieme se questo non ha scritto *complementare* davanti, ed appartiene al suo complementare se questo ha scritto *complementare* davanti; quindi gli insiemi scelti hanno intersezione non vuota, e la famiglia di partenza ha la proprietà voluta.

Quindi ho trovato 2^c ultrafiltri distinti, da cui $|\beta\mathbb{N}| = 2^c$. $\square$

Lemma 0.2. *Definisco* $T_{A,\mathcal{U}} := \{n : A - n \in \mathcal{U}\}$*; valgono le seguenti:*

- $[X \subseteq Y] \Rightarrow [T_{X,\mathcal{U}} \subseteq T_{Y,\mathcal{U}}]$
- $T_{X\cup Y,\mathcal{U}} = T_{X,\mathcal{U}} \cup T_{Y,\mathcal{U}}$
- $T_{X\cap Y,\mathcal{U}} = T_{X,\mathcal{U}} \cap T_{Y,\mathcal{U}}$
- $T_{X^c,\mathcal{U}} = T^c_{X,\mathcal{U}}$

Esercizio 0.4. *La funzione* $\theta_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ *che manda* $\mathcal{U}$ *in* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ *non è continua (*$\mathcal{V}$ *non principale).*

Dimostrazione. Devo mostrare che esistono un ultrafiltro $\mathcal{U}$ ed un aperto O_A tali che $\theta_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) \in O_A$ ma ogni intorno O_B di $\mathcal{U}$ contiene un ultrafiltro $\mathcal{W}$ tale che $\theta_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) \notin O_A$. Questo è equivalente a mostrare che esistono A, $\mathcal{U}$ tali che (i) $T_{A,\mathcal{U}} \in \mathcal{V}$ e (ii) $\forall B \in \mathcal{U}\ \exists \mathcal{W}$ tale che $B \in \mathcal{W}$ e $T_{A,\mathcal{W}} \notin \mathcal{V}$. In realtà mostrerò l'esistenza di A ed $\mathcal{U}$ che soddisfano le seguenti condizioni più forti: (i) tutti i traslati di A stanno in $\mathcal{U}$ e (ii) $\forall B \in \mathcal{U}\ \exists \mathcal{W}_B$ che contiene B e tutti i traslati di A^c tranne un numero finito.
Scelgo una successione crescente di interi $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ tale che $a_{i+1} - a_i$ sia crescente in i, e pongo $A := \bigcup_i [a_{2i}, a_{2i+1})$; vale $A^c = \bigcup_i [a_{2i+1}, a_{2i+2})$. Un'intersezione finita di traslati di A contiene $\bigcup_i [a_{2i} - k, a_{2i+1} - n)$ (dove k ed n sono il minimo ed il massimo rispettivamente delle lunghezze delle traslazioni). Analogamente, un'intersezione finita di traslati di A^c contiene $\bigcup_i [a_{2i+1} - k, a_{2i+2} - n)$.
Definisco un insieme B *cattivo* se $\forall k \exists n$ tale che B non interseca nessuno degli intervalli $[a_{2i+1} - k, a_{2i+2} - n)$.
Si ha che se B non è *cattivo* allora $\exists k : \forall n$ B interseca $\bigcup_i [a_{2i+1} - k, a_{2i+2} - n)$: per ogni B non *cattivo* esiste un k tale che la famiglia formata da B e dai [traslati di A^c con traslazione di almeno k] ha la FIP, e si può quindi estendere ad ultrafiltro $\mathcal{W}_B$. In questo modo $T_{A^c,\mathcal{W}_B}$ è un insieme cofinito.
Tutto ora sta nel riuscire a mostrare l'esistenza di un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che contenga tutti i traslati di A e tutti i complementari degli insiemi *cattivi*: in questo modo $\mathcal{U}$ non conterrà insiemi *cattivi*, e $\forall B \in \mathcal{U}$ riuscirò a costruire un $\mathcal{W}_B$. Bisogna dunque mostrare che la famiglia formata dai traslati di A e dai complementari degli insiemi *cattivi* ha la FIP (così poi potrò estenderla ad ultrafiltro $\mathcal{U}$).
Un insieme D è il complementare di un insieme *cattivo* (e chiamerò tali insiemi *cocattivi*) se $\forall k\ \exists n$ tale che D contiene tutti gli intervalli $[a_{2i+1} - k, a_{2i+2} - n)$.
Consideriamo una famiglia finita di *cocattivi* ed una famiglia finita di traslati di A: l'intersezione dei traslati di A contiene $\bigcup_i [a_{2i}, a_{2i+1} - \overline{k})$ per un opportuno $\overline{k}$; per proprietà di essere *cocattivo*, ciascuno degli insiemi *cocattivi*

considerati avrà un n associato a $\overline{k}+1$. Considero un indice $\bar{i}$ abbastanza grande in modo che $a_{2\bar{i}+2}-a_{2\bar{i}+1}$ sia maggiore di tutti tali n: il numero $a_{2\bar{i}+1}-\overline{k}-1$ sta nell'intersezione della famiglia finita voluta.
Quindi i traslati di A e i *cocattivi* formano una famiglia con la FIP, che si estende ad un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con le proprietà cercate. $\square$

Esercizio 0.5. *Il centro di* $(\beta\mathbb{N},\oplus)$ *è* $\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{V}$ commuta con tutti gli elementi di $\beta\mathbb{N}$ allora $\theta_{\mathcal{V}}=\phi_{\mathcal{V}}$, quindi $\theta_{\mathcal{V}}$ è continua, da cui, per l'esercizio precedente, $\mathcal{V}$ è principale. D'altra parte se $\mathcal{V}=\bigsqcup_n$ è principale, allora, usando che $\{i : A-i\in\bigsqcup_n\}= = A-n$, vale $[A\in\mathcal{U}\oplus\bigsqcup_n]\Leftrightarrow[\{i : A-i\in\bigsqcup_n\}\in\mathcal{U}]\Leftrightarrow[A-n\in\mathcal{U}]\Leftrightarrow \Leftrightarrow[\{i : A-i\in\mathcal{U}\}\in\bigsqcup_n]\Leftrightarrow[A\in\bigsqcup_n\oplus\mathcal{U}]$. Quindi $\mathcal{U}\oplus\bigsqcup_n=\bigsqcup_n\oplus\mathcal{U}$. $\square$

Esercizio 0.6.

- *Se* $\mathcal{U}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}$ *allora per ogni* k *vale* $k\mathbb{N}\in\mathcal{U}$.
- $[\exists\mathcal{W} \ : \ \mathcal{W}\oplus\mathcal{U}=\mathcal{U}]\Leftrightarrow[\forall A\in\mathcal{U}\ \exists n\in\mathbb{N} \ : \ A-n\in\mathcal{U}]$
- $[\mathcal{U}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}]\Leftrightarrow[\forall A\in\mathcal{U}\ \exists a\in A \ : \ A-a\in\mathcal{U}]$

Dimostrazione.

- Per proprietà di ultrafiltro esiste esattamente un $r\in[0,k)$ tale che $k\mathbb{N}+r\in\mathcal{U}$: dato che $\mathcal{U}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}$ vale $\{n : k\mathbb{N}+r-n\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{U}$, ma $k\mathbb{N}-r-n\in\mathcal{U}$ se e solo se $k|n$, quindi $\{n : K\mathbb{N}-r-n\in\mathcal{U}\}=k\mathbb{N}\in\mathcal{U}$ e la tesi è dimostrata.
- ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{W}\oplus\mathcal{U}=\mathcal{U}$ allora $[A\in\mathcal{U}]\Leftrightarrow[T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{W}]$, quindi preso $A\in\mathcal{U}$, $T_{A,\mathcal{U}}$ è non vuoto, che è la tesi.

  ($\Leftarrow$) Considero la famiglia $\mathcal{F}:=\{B : B\supseteq T_{A,\mathcal{U}}$ con $A\in\mathcal{U}\}$: tale famiglia è un filtro in quanto (i) per ipotesi non contiene $\emptyset$ (ii) è chiusa per passaggio a sovrainsieme (iii) è chiusa per intersezione finita, dato che $[B_1\supseteq T_{A_1,\mathcal{U}}$ e $B_2\supseteq T_{A_2,\mathcal{U}}$ con $A_1,A_2\in\mathcal{U}]$ implica $[A_1\cap A_2\in\mathcal{U}$ e $B_1\cap B_2\supseteq T_{A_1\cap A_2,\mathcal{U}}]$. Estendo il filtro $\mathcal{F}$ ad ultrafiltro $\mathcal{W}$:

  se $A\in\mathcal{U}$ ho $A\in\mathcal{W}\oplus\mathcal{U}$ perchè $T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{W}$;

  se $A\notin\mathcal{U}$ vale $[A^c\in\mathcal{U}]\Rightarrow[T_{A^c,\mathcal{U}}\in\mathcal{W}]\Rightarrow[T_{A,\mathcal{U}}=T^c_{A^c,\mathcal{U}}\notin\mathcal{W}]\Rightarrow[A\notin\mathcal{W}\oplus\mathcal{U}]$.

  Quindi $A\in\mathcal{U}\Leftrightarrow A\in\mathcal{W}\oplus\mathcal{U}$, cioè $\mathcal{U}=\mathcal{W}\oplus\mathcal{U}$.
- ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{U}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}$, preso $A\in\mathcal{U}$ vale $T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{U}$, quindi $T_{A,\mathcal{U}}\cap A\in\mathcal{U}$, dunque $T_{A,\mathcal{U}}\cap A$ è non vuoto, che è la tesi.

  ($\Leftarrow$) Supponiamo che valga $A\in\mathcal{U}$ ma $T_{A,\mathcal{U}}\notin\mathcal{U}$: allora $A\setminus T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{U}$, quindi $(A\setminus T_{A,\mathcal{U}})\cap T_{(A\setminus T_{A,\mathcal{U}}),\mathcal{U}}\in\mathcal{U}$; ma essendo $T_{(A\setminus T_{A,\mathcal{U}}),\mathcal{U}}\subseteq T_{A,\mathcal{U}}$, avrei $\emptyset\in\mathcal{U}$, che è assurdo. Quindi $[A\in\mathcal{U}\Rightarrow T_{A,\mathcal{U}}\in\mathcal{U}]$.

Ora si ha che $T_{A,\mathcal{U}} \in \mathcal{U} \Rightarrow T_{A^c,\mathcal{U}} \notin \mathcal{U} \Rightarrow A^c \notin \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$. Quindi $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow T_{A,\mathcal{U}} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$.

$\square$