Esercizi lezione 24/3/15, Andrea Vaccaro

12 aprile 2015

Proposizione 0.1. *Verificare che se $A \cap B = \emptyset$*

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$$

Dimostrazione. Chiamando $a_n = \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$, $b_n = \frac{|B \cap [1,n]|}{n}$ e $c_n = \frac{|(A \cup B) \cap [1,n]|}{n}$, poiché A e B sono disgiunti, si verifica $a_n + b_n = c_n$.

Vediamo la prima disuguaglianza: se considero $\{c_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione che converga a $\underline{d}(A \cup B)$, questa induce 2 sottosuccessioni negli a_n e nei b_n tali per cui $a_{n_k} + b_{n_k} = c_{n_k}$. A meno di sottosuccessioni si ha che $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ammettono limiti, la somma dei quali sia $\underline{d}(A \cup B)$. Per definizione di $\liminf$ si ha che $\underline{d}(A)$ è minore uguale del limite degli a_{n_k} e così $\underline{d}(B)$ per i b_{n_k}; segue allora la disuguaglianza.

Passando alla seconda disuguaglianza, sia $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione degli a_n che converga a $\underline{d}(A)$. Considero allora $\{c_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ con gli indici corrispondenti, in modo che tutte ammettano limite (possibile a meno di sottosuccessione). Vale che se $l_c = \lim_{k \to \infty} c_{n_k}$, allora $l_c \geq \underline{d}(A \cup B)$; definendo in modo simile l_b, si ha dunque $\underline{d}(A \cup B) \leq l_c = \underline{d}(A) + l_b$ e poiché $l_b \leq \overline{d}(B)$, la tesi segue.

Per la terza disuguaglianza, similmente a prima consideriamo $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ in modo che il suo limite sia $\overline{d}(B)$. Con una notazione e una costruzione analoga a quella della disuguaglianza precedente, si ottiene che $l_c \leq \overline{d}(A \cup B)$, ovvero $l_a + \overline{d}(B) = l_c \leq \overline{d}(A \cup B)$, e poiché $l_a \geq \underline{d}(A)$, si ottiene la tesi.

Infine, sia $\{c_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione dei c_n convergente a $\overline{d}(A \cup B)$. Considerando (come sempre a meno di sottosuccessione in modo che tutte le successioni da noi considerate ammettano limite) allora $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ si ottiene $\overline{d}(A \cup B) = l_a + l_b \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$ per definizione di $\limsup$. $\square$

Proposizione 0.2. *Sia* $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$*. Se* $\sum_n \frac{1}{a_n} < \infty$ *allora* $d(A) = 0$*.*

Dimostrazione. Chiamiamo $a_n = \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$, e supponiamo vi sia una sottosuccessione (che chiameremo sempre a_n) che ammette limite positivo. A meno di togliere un segmento iniziale della successione, possiamo supporre $a_n \neq 0$ per ogni n. Se chiamiamo $l > 0$ il limite della successione, allora la successione $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette limite $\frac{1}{l} > 0$, ma ciò è assurdo per l'ipotesi $\sum_n \frac{1}{a_n} < \infty$. Si ottiene dunque che $\overline{d}(A) = 0$ e segue la tesi, poiché la successione degli a_n è positiva. $\square$

Proposizione 0.3. *Per ogni insieme infinito $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ trovare una bicolorazione $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup C_2$ in modo che per ogni H infinito ed omogeneo valga $\lim_{n\to\infty} \frac{|H\cap[1,n]|}{|X\cap[1,n]|} = 0$.*

Dimostrazione. Poiché $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\}$ è infinito, definendo $x_0 = 0$, si ha che $\mathbb{N} = \bigcup_{i\geq 0} [x_i, x_{i+1})$. Definiamo allora una bi-colorazione su $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup C_2$ come segue: sia $\{a, b\}$ con $a < b$; sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $a \in [x_k, x_{k+1})$. Se $b \in [x_j, x_{j+1})$ con $k \leq j \leq 2k$ allora poniamo $\{a, b\}$ in C_1, mettiamo la coppia in C_2 altrimenti. Sia ora $H = \{h_1 < h_2 < \cdots\}$ infinito omogeneo; poiché è infinito, si verifica che $\{a, b\} \in C_2$ per ogni $a, b \in H$. Sia infatti $h_1 \in [x_k, x_{k+1})$, poiché l'insieme $\bigcup_{k\leq j\leq 2k} [x_j, x_{j+1})$ è finito, dovrà esistere h_i fuori da tale unione; per definizione allora $\{h_1, h_i\} \in C_2$, dunque $[H]^2$ è colorato in C_2 poiché omogeneo. Studiamo allora $\lim_{n\to\infty} \frac{|H\cap[1,n]|}{|X\cap[1,n]|}$. Chiamiamo $\alpha_n = \frac{|H\cap[1,n]|}{|X\cap[1,n]|}$ e valga $h_1 \in [x_i, x_{i+1})$; vale allora che $\alpha_{h_1} = \frac{1}{i}$, e poiché H è omogeneo in C_2 deve anche valere che h_k sia al minimo in $[x_{2^{k-1}i}, x_{2^{k-1}i+1})$, dunque $\alpha_{h_k} \leq \frac{k}{2^{k-1}i}$, inoltre per ogni $n \in (h_k, h_{k+1})$ vale $\alpha_n \leq \frac{k}{2^{k-1}i}$, poiché rispetto ad α_{h_k} stiamo solo aumentando il denominatore. Dal momento che $\frac{k+1}{2^k} \leq \frac{k}{2^{k-1}}$ si ha che la successione degli α_n tende a zero, in quanto per ogni ϵ posso trovare un k tale che $\frac{k}{2^{k-1}i} < \epsilon$. $\square$