Esercizi del corso di "Ultrafiltri e metodi non standard"

Giada Franz

10 aprile 2015

1 Somma di ultrafiltri e ultrafiltri idempotenti

Definizione 1.1. Chiamiamo $\beta\mathbb{N} = \{\mathscr{U} \mid \mathscr{U}$ è un ultrafiltro su $\mathbb{N}\}$ l'insieme degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$.

Definizione 1.2. Definiamo un operazione $\oplus$ su $\beta\mathbb{N}$ tale che $A \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ se e solo se $\{n \mid A - n \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$.

Nel corso di tutta questa sezione sottoinderemo che gli ultrafiltri considerati sono ultrafiltri su $\mathbb{N}$.

Definizione 1.3. Diciamo che un ultrafiltro $\mathscr{U}$ è idempotente se è idempotente rispetto all'operazione $\oplus$, cioè $\mathscr{U} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$.

Esercizio 1.4. *Se $\mathscr{U}$ è idempotente, allora $k\mathbb{N} \in \mathscr{U}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Definiamo $A_i = k\mathbb{N} - i$ per $i = 1, \ldots, k$, allora $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$; per cui esiste un unico m tale che $A_m \in \mathscr{U}$. Osserviamo inoltre che dato $n \in \mathbb{N}$ vale che $A_i - n = A_j$ con $j \equiv i + n \pmod{n}$ e quindi che $A_i - n = A_j \in \mathscr{U}$ se e solo se $j = m$.

Poiché $\mathscr{U}$ è idempotente abbiamo che $\{n \mid A_m - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$; ma per quanto detto vale che $\{n \mid A_m - n \in \mathscr{U}\} = \{n \mid m + n \equiv m \pmod{k}\} = \{n \mid n \equiv 0 \pmod{k}\} = k\mathbb{N}$, di conseguenza abbiamo che $k\mathbb{N} \in \mathscr{U}$ e quindi la tesi. □

Proposizione 1.5. *Dato un ultrafiltro $\mathscr{U}$, esiste un ultrafiltro $\mathscr{V}$ tale che $\mathscr{V} \oplus \mathscr{U} = \mathscr{U}$ se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathscr{U}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che se esiste un ultrafiltro $\mathscr{V}$ tale che $\mathscr{V} \oplus \mathscr{U} = \mathscr{U}$ allora per ogni $A \in \mathscr{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathscr{U}$. Vale infatti che se $\mathscr{V} \oplus \mathscr{U} = \mathscr{U}$ allora per ogni $A \in \mathscr{U}$ abbiamo che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{V}$ e perciò in particolare $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\}$ non è vuoto, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathscr{U}$.

Dimostriamo ora la freccia opposta. Per ogni $A \in \mathscr{U}$ definiamo $B_A = \{n \mid A - n \in \mathscr{U}\}$, che è non vuoto per ipotesi, e definiamo quindi

$$\mathscr{F} = \bigcup_{A \in \mathscr{U}} \bigcup_{C \supseteq B_A} \{C\}.$$

Mostriamo innanzitutto che $\mathscr{F}$ è un filtro.

L'insieme vuoto non appartiene a $\mathscr{F}$ perché tutti i B_A sono non vuoti per quanto già detto. Inoltre è facile osservare che $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi per sua stessa costruzione.

Consideriamo ora $C_1, C_2 \in \mathscr{F}$, allora sicuramente esistono $A_1, A_2 \in \mathscr{U}$ tali che $C_1 \supseteq B_{A_1}$ e $C_2 \supseteq B_{A_2}$. Perciò, per dimostrare che $C_1 \cap C_2 \in \mathscr{F}$, basta mostrare che $B_{A_1} \cap B_{A_2} \in \mathscr{F}$; infatti $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi e $C_1 \cap C_2 \supseteq B_{A_1} \cap B_{A_2}$.

Abbiamo però che $B_{A_1} \cap B_{A_2} = \{n \mid A_1 - n \in \mathscr{U} \wedge A_2 - n \in \mathscr{U}\} = \{n \mid (A_1 - n) \cap (A_2 - n) \in \mathscr{U}\} = \{n \mid (A_1 \cap A_2) - n \in \mathscr{U}\} = B_{A_1 \cap A_2} \in \mathscr{F}$, che è proprio quello che volevamo.

Perciò abbiamo mostrato che $\mathscr{F}$ è un filtro. Consideriamo quindi $\mathscr{V}$ un ultrafiltro contente $\mathscr{F}$ (che sappiamo esistere).

Abbiamo perciò che per ogni $A \in \mathscr{U}$ vale che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} = B_A \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}$, quindi $A \in \mathscr{V} \oplus \mathscr{U}$. Di conseguenza $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V} \oplus \mathscr{U}$ e per massimalità degli ultrafiltri $\mathscr{U} = \mathscr{V} \oplus \mathscr{U}$, che è la tesi. □

Proposizione 1.6. *Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ è idempotente se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathscr{U}$.*

Dimostrazione. Se $\mathscr{U}$ è idempotente allora per ogni $A \in \mathscr{U} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$ vale che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$, quindi $A \cap \{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$ e perciò esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathscr{U}$.

Dimostriamo quindi la freccia opposta. Prendiamo $A \in \mathscr{U}$, vogliamo dimostrare che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$; da questo avremmo che $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$ e quindi per massimalità degli ultrafiltri $\mathscr{U} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$, che è la tesi.

Dimostriamo in particolare che $\{a \in A \mid A - a \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$, da cui avremmo quanto desiderato poiché $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Supponiamo per assurdo che ciò non valga, cioè $B = \{a \in A \mid A - a \in \mathscr{U}\} \notin \mathscr{U}$, allora per le proprietà degli ultrafiltri $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathscr{U}$. Per ipotesi esiste quindi $a' \in A \setminus B$ tale che $(A \setminus B) - a' \in \mathscr{U}$. Perciò $A - a' \in \mathscr{U}$, visto che $A - a' \supseteq (A \setminus B) - a'$ e $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Questo però è assurdo perché $a' \notin B$. $\square$

Proposizione 1.7. *Dato $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$, l'ultrafiltro $\mathscr{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \in {}^*A\}$ è idempotente se e solo se per ogni A tale che $\alpha \in {}^*A$, esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.6, sappiamo che $\mathscr{U}_\alpha$ è idempotente se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}_\alpha$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathscr{U}$. Quest'ultima affermazione è però facilmente equivalente a dire che per ogni A tale che $\alpha \in {}^*A$ esiste $a \in A$ tale che $\alpha \in {}^*A - a$, cioè $\alpha + a \in {}^*A$. $\square$