

# Ultrafiltri e metodi non standard, esercizi lezione 3

Luigi Marangio

## 1 Esercizio 1

Sia  $(P, \leq)$  un poset infinito. Allora esiste  $X \subset P$  catena infinita, o esiste  $Y \subset P$  anticatena infinita.

### 1.1 Soluzione

Coloriamo le coppie di  $P$  confrontabili di rosso e le restanti di nero. Il teorema di Ramsey ci assicura di avere un insieme infinito rosso o nero, sia esso  $H$ . Se  $H$  è nero, abbiamo trovato un'anticatena, se  $H$  è rosso una catena.

## 2 Esercizio 2

Dimostrare tramite compattezza combinatoria, che il teorema di Schur versione infinita implica quello in versione finita.

**Teorema 2.1** (Schur infinito).

Per ogni colorazione di  $\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_r$ ,  $\exists i \exists a < b < a + b \in C_i$ .

**Teorema 2.2** (Schur finito).

$\forall r \exists n$  tale che  $\forall \{1, \dots, n\} = C_1 \cup \dots \cup C_r$ ,  $\exists i \exists a < b < a + b \in C_i$ .

### 2.1 Soluzione

L'idea, presa dalla dimostrazione "Ramsey infinito implica Ramsey finito", è quella di supporre per assurdo che non valga la versione finita del teorema di Schur, e portare al limite tutti i controesempi a Schur finito, per ottenere un controesempio (e quindi un assurdo) a Schur infinito. Formalmente:

supponiamo per assurdo che non valga Schur finito, allora

$$\exists r : \forall n \exists \{1, \dots, n\} = C_1^{(n)} \cup \dots \cup C_r^{(n)},$$

senza triple (di Schur) monocromatiche. Fissiamo un ultrafiltro non principale su  $\mathbb{N}$ , sia  $\mathcal{U}$ . Vogliamo costruire una colorazione di  $\mathbb{N}$  a partire dalle colorazioni che abbiamo per ogni segmento.

A tal fine consideriamo  $\forall x \in \mathbb{N} : \Lambda_i(x) = \{n : x \in C_i^{(n)}\}$ ; osservando che per ogni  $i$ ,  $\Lambda_i(x)$  non può contenere elementi minori di  $x$ , si ha  $\cup_1^r \Lambda_i(x) = [x, +\infty) \in \mathcal{U}$ , perchè  $\mathcal{U}$  è non principale. Sempre perchè abbiamo un ultrafiltro non principale, possiamo concludere che esiste un unico (l'unione è disgiunta)  $i$  tale che  $\Lambda_i(x) \in \mathcal{U}$ . Allora dato  $n \in \mathbb{N}$ , lo coloriamo di  $D_i$  se e solo se  $\Lambda_i(n) \in \mathcal{U}$ .

Per il teorema di Schur infinito esiste una tripla  $a < b < a + b \in D_j$ , per un certo  $j$ . Per come abbiamo definito la colorazione allora  $\Lambda_i(a), \Lambda_i(b), \Lambda_i(a+b) \in \mathcal{U}$ , e dunque ci sta anche la loro intersezione, sia  $\Lambda$ .  $\Lambda$  è sicuramente non vuoto, quindi posso considerare un generico  $\lambda \in \Lambda$  e colorare l'insieme  $\{1, \dots, \lambda\} = C_1^{(\lambda)} \cup \dots \cup C_r^{(\lambda)}$ ; ma  $a, b, a + b \in C_j^{(\lambda)}$ , assurdo.

### 3 Esercizio 3

1. Trovare un  $\Delta_f$ -set che non è  $\Delta$ -set;
2. trovare un insieme non  $\Delta_f$ -set;
3. dimostrare che l'insieme dei  $\Delta_f$ -set, così come quello dei  $\Delta$ -set, sono regolari per partizioni.

#### 3.1 Soluzione

1. L'idea è di creare un insieme che è unione di insiemi di distanze (uno per ogni numero naturale), ma che contenga buchi tanto grandi da far cadere le distanze di qualsiasi insieme infinito.

L'insiemi di distanze per eccellenza sono dati dai multipli di un elemento; definiamo allora:

$$B_1 = \{0\}, B_2 = \{2, 3\}, B_3 = \{9, 18, 27\}, B_i = \{\max(B_{i-1}) \cdot i = b_i, 2b_i, \dots, i \cdot b_i\},$$

e sia  $B = \cup_i B_i$ .

$B$  è un  $\Delta_f$ -set, dimostriamo che non è un  $\Delta$ -set; supponiamo per assurdo che lo sia, allora esiste un insieme infinito  $H$ , tale che  $\Delta(H) \subset B$ . Poichè  $H$  è infinito,  $\Delta(H)$  è infinito, e poichè per ogni  $i$ ,  $B_i$  è finito, allora esistono infiniti  $i$  tali che  $\Delta(H) \cap B_i \neq \emptyset$ . Quindi riesco a trovare  $h_1 < h_2 < h_3 \in H$ , tali che  $h_3 - h_2 \in B_s \wedge h_2 - h_1 \in B_t$ , con  $s > t$ . Allora la somma di questi due elementi, è ancora un elemento di  $B$ , perchè  $(h_3 - h_2) + (h_2 - h_1) = h_3 - h_1$ , tuttavia per costruzione il successore di  $h_3 - h_2$  in  $B$ , dista da quest'ultimo almeno  $\max(B_{s-1}) \cdot s$ ; poichè  $t < s$ , e  $h_2 - h_1 \in B_t$ , quest'ultimo è sicuramente minore di  $\max(B_{s-1}) \cdot s$ , dunque  $(h_3 - h_2) + (h_2 - h_1) = h_3 - h_1 \notin B$ , assurdo.

2. L'insieme  $D$  dei numeri dispari, non è un  $\Delta_f$ -set, infatti ogni insieme delle differenze di un insieme di cardinalità almeno 3, contiene un

numero pari. Se per assurdo,  $H = \{h_1, h_2, h_3\}$  e  $\Delta(H) \subset D$ , allora possiamo scrivere  $h_3 - h_1 = 2i + 1 \wedge h_2 - h_1 = 2j + 1$ , da cui deduciamo  $h_3 - h_2 = 2(i - j)$ , che è pari, assurdo.

3. Dato un  $\Delta$ -set  $F$ , ed una sua colorazione  $F = C_1 \cup \dots \cup C_r$ , dimostriamo che uno dei colori è ancora un  $\Delta$ -set.

$F$  contiene un insieme  $\Delta(H)$ , per un certo  $H$  infinito, quindi anche  $F$  è infinito. Possiamo allora ripetere la dimostrazione del teorema di Ramsey per coppie su  $F$ , e applicarlo per dimostrare un teorema delle distanze su  $F$ ; otteniamo così un insieme infinito  $J$ , tale che  $\Delta(J)$  è monocromatico, ovvero tale colore è un  $\Delta$ -set.

Dato un  $\Delta_f$ -set  $G$ , ed una sua colorazione  $G = D_1 \cup \dots \cup D_r$ , dimostriamo che uno dei colori è ancora un  $\Delta_f$ -set.

Per un generico insieme  $P$ , essere un  $\Delta_f$ -set, significa:

$$\forall m \exists |H| = m : \Delta(H) \subset P;$$

tuttavia affinché  $P$  soddisfi questa proprietà, basta verificarla per infiniti  $m \in \mathbb{N}$  e non per forza per ogni numero naturale. Cerchiamo dunque un  $D_i$  tale che,  $\forall m \exists k > m \exists |H| = k : \Delta(H) \subset D_i$ .

L'idea è di usare il teorema delle distanze finito:

$$\forall m \forall r \exists n : \forall \{1, \dots, n\} = S_1 \cup \dots \cup S_r \Rightarrow \exists j \exists |H| = m : \Delta(H) \subset S_j;$$

per farlo consideriamo una bigezione  $f : G \rightarrow \mathbb{N}$ , ( $G$  è infinito), e le colorazioni indotte su ogni segmento iniziale di  $\mathbb{N}$ , cioè:

$$N_i^{(n)} = f(D_i) \cap \{1, \dots, n\};$$

fissiamo un  $m$ , ricordiamo che il numero dei colori ( $r$ ) è stato già fissato, allora per il teorema delle distanze finite trovo,  $H$  di cardinalità  $m$ , tale che  $\Delta(H) \subset N_j^{(n)}$ , per un certo  $n$  e per un certo  $j$ . Poichè  $r < \infty$ , fissato  $1 \leq t \leq r$ , per il principio dei cassetti, l'insieme

$$\{m : \exists |H| = m \wedge \Delta(H) \subset N_t\},$$

ha cardinalità infinita (con  $N_t = \cup_n N_t^{(n)} = f(D_i)$ ). Ma allora  $f^{(-1)}(N_t) = D_t$  è un  $\Delta_f$ -set, come volevasi dimostrare.

## 4 Esercizio 4

Partizionare  $\mathbb{N}$  in due parti tali che nessuna delle due contenga progressioni aritmetiche infinite.

## 4.1 Soluzione

Basta dividere  $\mathbb{N}$  in due parti, ognuna con buchi arbitrariamente grandi; ad esempio:

$$A = \{0, 2, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 20, \dots\},$$

$$B = \{1, 4, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 25, \dots\}.$$

Formalmente definiamo,

$$A_1 = \{0\}, A_2 = \{2, 3\}, A_n = \{\max(A_{n-1}) + n = a_n, a_n + 1, \dots, a_n + n - 1\}$$

$$B_1 = \{1\}, B_2 = \{4, 5\}, B_n = \{\max(B_{n-1}) + n + 1 = b_n, b_n + 1, \dots, b_n + n - 1\}.$$

Chiamati  $A = \cup A_n$  e  $B = \cup B_n$ , si ha che  $\mathbb{N} = A \cup B$ , e nessuno dei due contiene progressioni aritmetiche: data una progressione aritmetica  $\varphi \subset A$  di ragione  $r$ , allora  $\varphi \subset \cup_{i=1}^r A_i$ , cioè  $\varphi$  non è infinita (lo stesso vale per  $B$ ).

## 5 Esercizio 5

Dimostrare il teorema di Ramsey e il teorema delle distanze (finiti) usando il teorema di compattezza combinatoria.

**Teorema 5.1** (CPT combinatoria). Se  $\mathcal{A}$  è una famiglia di insiemi finiti  $r$ -regolare su un insieme  $X$ , allora esiste un sottinsieme di  $X$ , sia  $Y$ , finito, tale che  $\mathcal{A}$  è  $r$ -regolare su  $Y$ .

**Teorema 5.2** (Ramsey finito).

$$\forall m \forall r \forall k \exists n : \forall \{1, \dots, n\}^k = C_1 \cup \dots \cup C_r \Rightarrow \exists j \exists |H| = m : [H]^k \subset C_j;$$

**Teorema 5.3** (Distanze finito).

$$\forall m \forall r \exists n : \forall \{1, \dots, n\} = C_1 \cup \dots \cup C_r \Rightarrow \exists j \exists |H| = m : \Delta(H) \subset C_j.$$

### 5.1 Soluzione

Fissiamo  $m, r, k$ ; per il teorema di Ramsey infinito, la famiglia  $\mathcal{A}_m = \{[A]^k : |A| = m\}$  è  $r$ -regolare su  $[\mathbb{N}]^k$ . Per compattezza esiste allora un insieme finito  $Y \subset [\mathbb{N}]^k$ , tale che  $\mathcal{A}_m$  è  $r$ -regolare su  $Y$ .  $Y$  è finito, quindi esiste un  $t$ , tale che  $Y \subset [\{1, \dots, t\}]^k$ . Per regolarità, data una qualsiasi colorazione di  $[\{1, \dots, t\}]^k = C_1 \cup \dots \cup C_r$  (e quindi di  $Y$ ), esistono un  $[A]^k \in \mathcal{A}_m$  e un  $j$ , tali che  $[A]^k \subset C'_j = C_j \cap Y \subset C_j$ , come volevasi dimostrare.

La dimostrazione del teorema delle distanze finito procede in maniera identica a quella precedente, basta fissare  $m, r$  all'inizio e considerare la famiglia  $\mathcal{A}_m = \{\Delta(H) : |H| = m\}$ . Essa è  $r$ -regolare su  $\mathbb{N}$  per il teorema delle distanze infinito...