Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 23-24-27/3/15

Definizione 0.1. *Dato $\nu \in^* \mathbb{N}$ infinito, si definisce $\mu_\nu(A) := st(\frac{|^*A\cap[1,\nu]|}{\nu})$*

Lemma 0.1. *μ_ν è una misura finitamente additiva invariante per traslazione su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Lemma 0.2. *$\overline{d}(A) = \max_\nu\{\mu_\nu(A)\}$ e $\underline{d}(A) = \min_\nu\{\mu_\nu(A)\}$*

Esercizio 0.1. *$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$*

Dimostrazione. Sono ovvie le seguenti (supponendo che tutti i massimi ed i minimi esistano):

- $\min_i\{x_i\} + \min_i\{y_i\} \leq \min_i\{x_i + y_i\}$
- $\max_i\{x_i\} + \max_i\{y_i\} \geq \max_i\{x_i + y_i\}$
- $\max_i\{x_i\} + \min_i\{y_i\} \leq \max_i\{x_i + y_i\}$
- $\max_i\{x_i\} + \min_i\{y_i\} \geq \min_i\{x_i + y_i\}$

Per il lemma 1, essendo $A \cap B = \emptyset$, vale $\mu_\nu(A) + \mu_\nu(B) = \mu_\nu(A \cup B)$. Ora la basta riscrivere la tesi usando il lemma 2: $\min_\nu\{\mu_\nu(A)\} + \min_\nu\{\mu_\nu(B)\} \leq \min_\nu\{\mu_\nu(A \cup B)\} \leq \min_\nu\{\mu_\nu(A)\} + \max_\nu\{\mu_\nu(B)\} \leq \max_\nu\{\mu_\nu(A \cup B)\} \leq \max_\nu\{\mu_\nu(A)\} + \max_\nu\{\mu_\nu(B)\}$ □

Esercizio 0.2. *Dato $A := \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ con a_i interi crescenti al crescere di i, vale $\sum_i \frac{1}{a_i} < \infty \Rightarrow \overline{d}(A) = 0$*

Dimostrazione. Dimostro la contronominale $\overline{d}(A) = 2\epsilon > 0 \Rightarrow \sum_i \frac{1}{a_i} = \infty$. Essendo $\overline{d}(A) = 2\epsilon$, posso scegliere una successione crescente di interi α_i tale che $\frac{|A\cap[1,\alpha_i]|}{\alpha_i} > \epsilon$; inoltre posso supporre $\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \to 0$ (a meno di estrarre una sottosuccessione degli α_i). Sia $\beta_i := |A \cap [1, \alpha_i]|$: vale $\alpha_i \geq \beta_i \geq \epsilon\alpha_i$. Si ha che (visto che in $A \cap [\alpha_{i-1} + 1, \alpha_i]$ ci sono $\beta_i - \beta_{i-1}$ elementi)

$$\sum_{j=1}^{\alpha_N} \frac{1}{a_j} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{a \in A\cap[\alpha_{i-1}+1,\alpha_i]} \frac{1}{a} \geq \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{\beta_i-\beta_{i-1}} \frac{1}{\alpha_i + 1 - k} \geq \sum_{i=1}^{N} \int_{\alpha_i+1-(\beta_i-\beta_{i-1})}^{\alpha_i+1} \frac{1}{t}dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \log(\frac{\alpha_i + 1}{\alpha_i + 1 - (\beta_i - \beta_{i-1})}) \geq \sum_{i=1}^{N} \log(\frac{\alpha_i + 1}{\alpha_i + 1 - (\epsilon\alpha_i - \alpha_{i-1})}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \log(1 + \frac{\epsilon - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}}{1 - \epsilon + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}})$$

e dal momento che $\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \to 0$, l'addendo della somma scritta sopra tende a $\log(1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}) > 0$, quindi la serie diverge e la tesi è dimostrata. $\square$

Esercizio 0.3. *Dato* $X = \{x_1 < x_2 < ...\}$ *trovare una* 2*-colorazione di* $[\mathbb{N}]^2$ *tale che* $\forall H$ *infinito e con tutte le coppie di elementi monocromatiche valga* $\lim_{n\to\infty} \frac{|H\cap[1,n]|}{|X\cap[1,n]|} = 0$

Dimostrazione. Scelgo una successione crescente a_i e coloro le coppie in questo modo:

- $x, y \in [a_i, a_{i+1}) \Rightarrow \{x, y\}$ rosso;
- $x \in [a_i, a_{i+1})$ $y \in [a_j, a_{j+1}) \Rightarrow \{x, y\}$ blu $(i \neq j)$;

In questo modo, qualunque insieme H infinito con tutte le coppie monocromatiche non può contenere due elementi nello stesso intervallo $[a_i, a_{i+1})$, altrimenti non potrebbe contenere altri elementi all'infuori di quelli in $[a_i, a_{i+1})$ e non sarebbe infinito. A questo punto basta scegliere $a_i = x_{2^i}$: in questo modo se $x_{2^i} \leq n < x_{2^{i+1}}$ si ha $\frac{|H\cap[1,n]|}{|X\cap[1,n]|} \leq \frac{i+1}{2^i} \to 0$ $\square$

Esercizio 0.4. $BD(A) > 0 \Rightarrow A - A$ *sindetico.*

Dimostrazione. Lemma preliminare: se un insieme B non è sindetico, allora ${}^*B$ contiene buchi di lunghezza infinita in ogni intervallo $[1, \lambda]$ con λ infinito; infatti sia dato B non sindetico, e siano $B_1, B_2, ...$ insiemi di $1, 2, ...$ interi consecutivi rispettivamente tali che $B_i \cap B = \emptyset$ e $\max B_i < \min B_{i+1}$, e sia dato $\lambda = [(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ infinito: allora l'insieme interno generato dalla successione $\langle B_{k(i)} | i \in \mathbb{N}\rangle$ (dove $k(i) := \max\{k : \max B_k \leq \lambda_i\}$) è un intervallo infinito contenuto in $[1, \lambda]$ e che non interseca ${}^*B$.
Caratterizzazione non-standard della densità di Banach: vale, al variare di J tra gli intervalli infiniti, $BD(A) = \max st(\frac{|{}^*A\cap J|}{|J|})$: inoltre è facile dimostrare che se $BD(A) = st(\frac{|{}^*A\cap I|}{|I|})$, λ infinito e $\frac{|I|}{\lambda}$ è infinito, allora esiste un sottointervallo $K \subseteq I$ lungo λ tale che $BD(A) = st(\frac{|{}^*A\cap K|}{|K|})$.
Veniamo ora all'esercizio: supponiamo per assurdo che $A - A$ non sia sindetico: allora per il lemma ${}^*(A - A) = {}^*A - {}^*A$ ha buchi infiniti in ogni intervallo $[1, \lambda]$ con λ infinito. Inoltre, poichè $BD(A) = d > 0$, esiste un intervallo infinito I tale che $st(\frac{|{}^*A\cap I|}{|I|}) \simeq d$. Considero ora un buco infinito di ${}^*A - {}^*A$ contenuto in $[1, \sqrt{|I|}]$, e sia $[\nu\varphi - \varphi, \nu\varphi + \varphi]$ tale buco (ν, φ infiniti, $\nu\varphi < \sqrt{|I|}$): se $a \in {}^*A$ allora $[a + \nu\varphi - \varphi, a + \nu\varphi + \varphi] \cap {}^*A = \emptyset$. Scelgo ora un sottointervallo $[x, x + 2\nu\varphi] \subseteq I$ lungo $2\nu\varphi$ tale che $st(\frac{|{}^*A\cap[x,x+2\nu\varphi]|}{2\nu\varphi}) \simeq d$. Divido tale intervallo in sottointervalli lunghi φ indicizzati con $[1, 2\nu]$: se l'intervallo con indice ϑ interseca ${}^*A$, allora l'intervallo con indice $\vartheta + \nu$ non

può intersecare ${}^*A$. Quindi ${}^*A$ interseca al più la metà (cioè ν) di tali intervalli; inoltre per definizione di densità di Banach, in ognuno di tali intervalli ${}^*A$ può avere al più densità d: quindi $d \simeq st(\frac{|{}^*A \cap [x, x+2\nu\varphi]|}{2\nu\varphi}) \leq \frac{\nu\varphi d}{2\nu\varphi} = \frac{d}{2}$, assurdo. $\square$