Esercizi del Corso “Ultrafiltri e Metodi Non Standard”

Federico Glaudo

7 aprile 2015

1 Ultrafiltri selettivi

Teorema 1.1 (Equivalenze dei selettivi)**.** *Dato un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale su $\mathbb{N}$, sono equivalenti le seguenti proposizioni:*

(1) L'ultrafiltro $\mathcal{U}$ è minimale tra i non principali rispetto all'ordinamento di Rudin-Keisler.

(2) Per ogni partizione $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$ tale che $A_i \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap A_i$ contiene alpiù un elemento per ogni i.

(3) Per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f \restriction_X$ è iniettiva o costante.

(4) Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante o ad una funzione bigettiva.

(5) Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione non decrescente.

(6) Per ogni infinitesimo $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona infinitesima tale che $[f] = \varepsilon$.

(7) Per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f \restriction_X$ è strettamente *crescente o costante.*

(8) Per ogni 2-colorazione[1] di $[\mathbb{N}]^2$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $[X]^2$ è monocromatico.

Dimostrazione. Mostriamo tutte le equivalenze secondo questo schema: iniziamo con l'equivalenza di (2), (3), (4), passiamo poi all'equivalenza tra (1) e (4), concludiamo infine con la seguente catena di implicazioni (2) $\implies$ (8) $\implies$ (7) $\implies$ (6) $\implies$ (5) $\implies$ (3).

(2) $\implies$ (3) Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, costruiamo la partizione formata dagli $A_i = \{n : f(n) = i\}$. Se esiste i tale che $A_i \in \mathcal{U}$, di certo $f \restriction_{A_i}$ è costante e la tesi è mostrata, altrimenti di certo abbiamo un insieme $X \in \mathcal{U}$ tale che seleziona alpiù un elemento da ogni A_i. Ciò però equivale ad affermare che $f \restriction_X$ sia iniettiva.

[1] Sia la proposizione, che la dimostrazione che ne daremo, si generalizzano facilmente a colorazioni con un numero arbitrario di colori. Per questioni di chiarezza espositiva trattiamo solo il caso delle 2-colorazioni.

(3) $\implies$ **(4)** Data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f \restriction_X$ è costante, allora banalmente f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante. Altrimenti troviamo $X \in \mathcal{U}$ tale che $f \restriction_X$ sia iniettiva.

Visto che $\mathcal{U}$ è non principale, l'insieme X è numerabile e perciò esistono Y , Z disgiunti e numerabili anch'essi tali che $X = Y \sqcup Z$. A questo punto possiamo assumere senza perdita di generalità che valga $Y \in \mathcal{U}$. Per quanto detto vale $Y^{\mathsf{c}} \supseteq Z$ e perciò Y^{c} risulta numerabile, analogamente, ricordando che f è iniettiva ridotta su $Y \sqcup Z$, vale $f(Y)^{\mathsf{c}} \supseteq f(Z)$ e quindi anche $f(Y)^{\mathsf{c}}$ numerabile. Allora, visto che dominio e codominio hanno la medesima cardinalità, possiamo fissare una bigezione $g : Y^{\mathsf{c}} \to f(Y^{\mathsf{c}})$.

Costruiamo quindi la funzione $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ secondo la legge

$$\tilde{f}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \in Y \\ g(n) & \text{se } n \notin Y \end{cases}$$

e notiamo che $\tilde{f} \restriction_Y = f \restriction_Y$ e che $\tilde{f}$ è bigettiva. Queste due ultime osservazioni costituiscono proprio la tesi.

(4) $\implies$ **(2)** Data la partizione $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$, chiamiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione che ad n associa l'unico indice $f(n)$ tale che $n \in A_{f(n)}$. Visto che per ipotesi $A_n \notin \mathcal{U}$, di certo la funzione f non è $\mathcal{U}$-equivalente ad una costante, di conseguenza è $\mathcal{U}$-equivalente a $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva. Quindi, se $X \in \mathcal{U}$ è un insieme su cui f , $\tilde{f}$ coincidono, allora X ha la proprietà selettiva, cioè interseca alpiù una volta ogni insieme A_n, infatti se lo intersecasse due volte $\tilde{f}$ non sarebbe iniettiva.

(4) $\implies$ **(1)** Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, vogliamo mostrare che o $f(\mathcal{U})$ è principale oppure è Rudin-Keisler equivalente ad $\mathcal{U}$. Se f è $\mathcal{U}$ equivalente ad una costante allora è facile verificare che $f(\mathcal{U})$ è proprio l'ultrafiltro principale generato da tale costante. Altrimenti f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva, e di conseguenza $f(\mathcal{U}) = \tilde{f}(\mathcal{U})$, ma $\tilde{f}(\mathcal{U})$ è ovviamente Rudin-Keisler equivalente ad $\mathcal{U}$ visto che $\tilde{f}$ è una bigezione.

(1) $\implies$ **(4)** Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, o $f(\mathcal{U})$ è un ultrafiltro principale oppure esiste una bigezione $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(\mathcal{U}) = \tilde{f}(\mathcal{U})$. Se $f(\mathcal{U})$ è un ultrafiltro principale generato da x, allora, per definizione di $f(\mathcal{U})$, deve essere $f^{-1}(x) \in \mathcal{U}$ e ciò equivale ad affermare che f è $\mathcal{U}$-equivalente alla funzione costantemente uguale ad x. Altrimenti $f(\mathcal{U}) = \tilde{f}(\mathcal{U})$ e ciò implica che f è $\mathcal{U}$-equivalente ad $\tilde{f}$, visto che $\tilde{f}$ è in particolare iniettiva.

(8) $\implies$ **(7)** Data la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, coloriamo $[\mathbb{N}]^2$ in due colori in modo che, dati $m < n$, la coppia $\{m , n\}$ sia bianca se $f(m) < f(n)$ e nera altrimenti. Sia $\{h_1 < h_2 < \cdots\} = H \in \mathcal{U}$ un insieme tale che $[H]^2$ sia monocromatico. Se $[H]^2$ è nero, allora $(f(h_i))_{i\in\mathbb{N}}$ è una sequenza infinita, visto che $\mathcal{U}$ non contiene insiemi finiti, debolmente decrescente e ciò implica che sia definitivamente costante, in particolare assumiamo che per $i \geq K$ la successione sia costante. Allora restringendo f ad $H \cap \{n \geq h_K\}$ si ottiene una funzione costante. Altrimenti $(f(h_i))_{i\in\mathbb{N}}$ è una sequenza strettamente crescente e perciò $f \restriction_H$ è strettamente crescente.

(7) $\implies$ **(6)** Sia $[\varepsilon_n] = \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ un infinitesimo, senza perdita di generalità possiamo assumere che $\varepsilon_n \geq 0$ per ogni n (tale disuguaglianza o l'opposta vale per quasi ogni n e cambiare un numero finito di ε_n non perturba ε). Se $\varepsilon = 0$ allora la tesi è ovvia, altrimenti possiamo assumere che $\varepsilon_n \neq 0$ per ogni n (per lo stesso motivo di prima).

Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ di modo che $f(n) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon_n} \right\rfloor$. Il fatto che ε sia infinitesimo ci assicura che tale funzione non sia costante ristretta su un qualunque insieme in $\mathcal{U}$. Allora deve esistere $\{x_1 < x_2 < \cdots\} = X \in \mathcal{U}$ tale che $f \restriction_X$ sia strettamente crescente. Definendo $\tilde{\varepsilon} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo che se $x_i \leq n < x_{i+1}$ allora $\tilde{\varepsilon}(n) = \varepsilon_{x_i}$, abbiamo concluso visto che $\tilde{\varepsilon}(n) = \varepsilon_n$ per ogni $n \in X$ e la funzione $\tilde{\varepsilon}$ risulta facilmente monotona.

(6) $\implies$ **(5)** Data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sia $\varepsilon = \left[\frac{1}{f}\right] \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Se ε non è infinitesimo allora esiste $\delta \in \mathbb{R}$ tale che $\{n : \frac{1}{f(n)} \geq \delta\} \in \mathcal{U}$ e ciò equivale ad affermare che per qualche $X \in \mathcal{U}$ la funzione $f \restriction_X$ è limitata ed assume un numero finito di valori. Ma allora è evidente, essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, che esiste $X \supseteq Y \in \mathcal{U}$ tale che $f \restriction_Y$ sia costante e ciò equivale ad affermare che f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante e quindi in particolare non decrescente.

Altrimenti ε deve essere infinitesimo e quindi deve esistere $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ decrescente[2] infinitesima tale che $[g] = \varepsilon = \left[\frac{1}{f}\right]$. Ma allora è evidente che f è $\mathcal{U}$-equivalente a $\frac{1}{g}$ e che quest'ultima è una funzione non decrescente.

(5) $\implies$ **(3)** Data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, essa è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione $\tilde{f}$ non decrescente, sia $X \in \mathcal{U}$ in particolare un insieme tale che $f \restriction_X = \tilde{f} \restriction_X$. Se $\tilde{f}$ è definitivamente costante, in particolare lo è per $n \geq K$, allora f ristretta ad $X \cap \{n : n \geq K\}$ è costante.

Altrimenti $\tilde{f}$ assume un fissato valore un numero finito di volte. Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia q_n la cardinalità dell'insieme $\{k : n \leq k \wedge \tilde{f}(n) = \tilde{f}(k)\}$. Definiamo allora una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(n) = \tilde{f}(n) + q_n$. Esiste una funzione $\tilde{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non decrescente tale che esiste $Y \in \mathcal{U}$ con $g \restriction_Y = \tilde{g} \restriction_Y$. Vogliamo verificare che la funzione iniziale f ridotta su $X \cap Y$ è iniettiva. Siano allora $m < n$ nell'intersezione $X \cap Y$ tali che per assurdo $f(m) = f(n)$. Di certo si deve avere anche $\tilde{f}(m) = \tilde{f}(n)$, da cui è facile ottenere $q_m > q_n$. A questo punto però, per definizione di g, è evidente che $g(m) > g(n)$ e ciò implica $\tilde{g}(m) > \tilde{g}(n)$ che è assurdo poiché $\tilde{g}$ è non decrescente.

(2) $\implies$ **(8)** Sia fissata una 2-colorazione di $[\mathbb{N}]^2$ in bianco e nero. Coloriamo $\mathbb{N}$ stesso di due colori, in particolare n è bianco se $\{m : \{m\,,\,n\}$ è bianco$\} \in \mathcal{U}$ e nero altrimenti. Siano $B\,,\,N \subseteq \mathbb{N}$ i bianchi e i neri. Senza perdità di generalità possiamo assumere che $B \in \mathcal{U}$ e fondamentalmente da qui in poi lavoreremo solo con i bianchi arrivando a trovare un $H \in \mathcal{U}$ tale che $[H]^2$ sia monocromatico di colore bianco[3].

Definiamo la famiglia decrescente di insiemi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di modo che valga

$$A_n = \{m : \{m\,,\,i\} \text{ è bianco per ogni } i \leq n\} \cap B\,.$$

[2]Essendo monotona, a valori positivi e dovendo assumere valori arbitrariamente piccoli è ovvio che debba essere decrescente.

[3]Abbiamo ricondotto l'enunciato ad una questione sui grafi: dato un grafo su $\mathbb{N}$ in cui il grado di ogni vertice è grande (cioè l'insieme dei suoi archi sta in $\mathcal{U}$) esiste una cricca grande (cioè che sta in $\mathcal{U}$).

Ovviamente $A_n \in \mathcal{U}$ essendo intersezione di insiemi in $\mathcal{U}$. Consideriamo la partizione di $\mathbb{N}$ data dalla famiglia $N \cup \{A_{n-1} \setminus A_n\}$, è chiaro che tutto $\mathbb{N}$ è ricoperto visto che $n \notin A_n$. Visto che nessun insieme della famiglia appartiene ad $\mathcal{U}$ esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che X interseca ogni insieme della famiglia alpiù una volta. A meno di privarlo di un elemento possiamo assumere $X \subseteq B$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, notiamo che $X \setminus A_n$ ha un numero finito di elementi e che inoltre se $n \in X$ allora $n \in X \setminus A_n$. Possiamo perciò definire per ricorrenza $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ponendo $s_1 = x_1$ ed imponendo che s_{n+1} sia il minor elemento di X che sia maggiore di tutti gli elementi di $X \setminus A_{s_n}$. A questo punto consideriamo la seguente partizione $\{X^{\mathsf{c}}\} \cup \{[s_n\,,\, s_{n+1}) \cap X\}$. È evidente che nessun elemento della partizione sta in $\mathcal{U}$, o perché finito o perché complementare di un insieme in $\mathcal{U}$, e allora sia $Y \in \mathcal{U}$ un insieme che interseca ogni insieme della partizione alpiù una volta. A meno di togliere un unico elemento ad Y possiamo assumere $Y \subseteq X$.

Chiamando $\{y_1 < y_2 < \cdots\}$ gli elementi ordinati di Y, vogliamo dimostrare che se $i + 1 < j$ allora la coppia $\{y_i\,,\, y_j\}$ è bianca. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $y_j \in [s_k\,,\, s_{k+1})$. Grazie all'ipotesi $i + 1 < j$ è facile dedurre che $y_i \leq s_{k-1}$. Per la definizione della successione (s_n), vale $y_j \notin X \setminus A_{s_{k-1}}$ da cui discende $y_j \in A_{s_{k-1}} \subseteq A_{y_i}$ e ciò implica che la coppia $\{y_i\,,\, y_j\}$ è bianca. A questo punto partizioniamo Y in $Y_1 = \{y_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ e $Y_2 = \{y_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Per quanto appena detto, sia $[Y_1]^2$ che $[Y_2]^2$ sono monocromatici ed almeno uno dei due sta in $\mathcal{U}$.

$\square$