Esercizi lezione 23/3/15, Andrea Vaccaro

31 marzo 2015

Proposizione 0.1. *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ interno. A è iperinfinito $\iff$ esiste $f : A \to {}^*\mathbb{N}$ interna bigettiva.*

Dimostrazione. Prima di cominciare con la dimostrazione vera e propria, vediamo di definire, se A è interno associato alla successione di sottoinsiemi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, quando una funzione $f : A \to {}^*\mathbb{R}$ è interna. Diciamo che f è interna se esiste una successione $\{f_n : A_n \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, e se quando $[\xi] \in A$, e $B = \{n : \xi_n \in A_n\} \in U$, si ha che $f([\xi])$ è la classe di una successione definita per $n \in B$ come $f_n(\xi_n)$. In questo modo f è ben definita poiché in ${}^*\mathbb{R}$ esiste un solo elemento così (elementi uguali su B sono uguali, poiché $B \in U$).

Se A è iperinfinito, allora è generato da una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi infiniti, perciò per ogni n posso trovare f_n bigezione fra A_n ed $\mathbb{N}$. Definisco allora f come la funzione associata alla successione delle f_n. Tale funzione è iniettiva poiché se $[\xi] \neq [\eta]$, allora esiste $C \in U$ sui cui $\xi_n \neq \eta_n$; poiché le f_n sono bigettive, si ha $f_n(\xi_n) \neq f_n(\eta_n)$ su $C \cap B_1 \cap B_2$, e quindi $f([\xi]) \neq f([\eta])$, dove $B_1 = \{n : \xi_n \in A_n\} \in U$ e $B_2 = \{n : \eta_n \in A_n\} \in U$. La funzione f è anche suriettiva poiché se $[\xi] \in \mathbb{N}$, allora basta prendere $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\eta_n = f_n^{-1}(\xi_n)$ e ovviamente si avrà $[\eta] \in A$ e $f([\eta]) = [\xi]$.

Sia f bigezione interna fra A ed ${}^*\mathbb{N}$. Se mostriamo che esiste un $C \in U$ tale per cui per ogni $n \in C$ si abbia $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ suriettiva abbiamo concluso. Se infatti A fosse iperfinito avrebbe un massimo $[M]$, ma allora potrei trovare $[\xi] \in A$ tale per cui $\xi_n > M_n$ per $n \in C$, dunque $[\xi] > [M]$, assurdo. Sia allora $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ con $C_1 = \{n : f_n \text{ suriettiva}\}$ e C_2 il complementare. Se fosse $C_2 \in U$, allora per ogni $n \in C_2$ potrei trovare $h_n \notin f_n(A_n)$, ma se quindi definisco h come la successione che vale h_n se $n \in C_2$ e zero altrove, si ottiene che $[h]$ non ha controimmagine mediante f. Se infatti $[\xi] \in A$, allora se $B = \{n : \xi_n \in A_n\} \in U$, si ottiene che in $C_2 \cap B \in U$ vale $f_n(\xi_n) \neq h_n$ e dunque $f([\xi]) \neq [h]$. □

Proposizione 0.2. *Mostrare che l'insieme dei Δ^*-set è un filtro.*

Dimostrazione. Che $\mathbb{N}$ sia un Δ^*-set e che $\emptyset$ non lo sia è ovvio; è anche ovvio che se A interseca ogni Δ-set, allora anche $B \supseteq A$ lo farà. Siano ora A e B due Δ^*-set, supponiamo $A \cap B$ non lo sia. Esiste perciò X infinito tale che $\Delta(X) \cap A \cap B = \emptyset$. Ovviamente $Y = \Delta(X)$ è un Δ-set, e possiamo partizionarlo $Y = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ dove $C_1 = Y \cap A$, $C_2 = Y \cap B$ e $C_3 = (C_1 \sqcup C_2)^c$; notiamo che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ per ipotesi assurda. Poiché la famiglia dei Δ-set è regolare per partizioni, si ha che uno dei C_i deve essere un Δ-set. Se però fosse C_3, per ipotesi dovrei avere $C_3 \cap A \neq \emptyset$, e quindi $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$, contro la definizione. Sia allora, senza perdere di generalità, C_1 un Δ-set. Ma allora devo avere $C_1 \cap B \neq \emptyset$, poiché B è un Δ^*-set, ma questo sarebbe assurdo poiché $C_1 \cap B = C_1 \cap C_2 = \emptyset$. □

Proposizione 0.3. *Verificare che $BD(A) = 1 \iff A$ è spesso.*

Dimostrazione. Sia A spesso, dunque per ogni n esiste x tale che $[x+1, x+n] \subset A$, quindi $\max_{x\in\mathbb{N}}(|A \cap [x+1, x+n]|) = n$ per ogni n, quindi $BD(A) = 1$.

Supponiamo ora $BD(A) = 1$. Per assurdo, sia n tale che A non contenga intervalli lunghi più di n; considero allora la successione $a_k = \max_{x\in\mathbb{N}}(\frac{|A\cap[x+1,x+(k+1)n]|}{(k+1)n})$. Poiché A contiene intervalli limitati da n, si ha che $a_k < \frac{(k+1)n-k}{(k+1)n} = 1 - \frac{k}{(k+1)n}$ che per k che tende all'infinito tende a $1 - \frac{1}{n}$. Ma allora $BD(A) \leq 1 - \frac{1}{n}$, assurdo per ipotesi. $\square$

Proposizione 0.4. *Trovare un insieme A tale che $\overline{d}(A) = 0$ e $BD(A) = 1$.*

Dimostrazione. Costruiremo l'insieme A per passi, come unione di segmenti A_n di lunghezza n, opportunamente distanziati. Nella costruzione che realizzeremo tutti gli A_k saranno disgiunti, chiamando poi m_k ed M_k minimo e massimo di A_k, si avrà $M_k < m_{k+1}$ per ogni k; infine la cosa più importante sarà che in $[1, M_k]$ l'insieme $\bigcup_{h=1}^{k} A_h$ avrà cardinalità minore o uguale a $\frac{M_k}{k}$ (e così anche $A \cap [1, M_k]$). A questo punto, chiamando $a_m = \frac{|A \cap [1,m]|}{m}$, si avrà che per ogni $m > M_k$ varrà $a_m < \frac{1}{k}$, poiché per costruzione varrà $a_{M_k} \leq \frac{1}{k}$, per $M_k < l < m_{k+1}$ la cardinalità di $A \cap [1, l]$ sarà uguale a quella di $A \cap [1, M_k]$, quindi $a_l < a_{M_k} \leq \frac{1}{k}$. Per $M_{k+1} \geq i \geq m_{k+1}$, se chiamiamo $j = M_{k+1} - i$, allora dal momento che $a_{M_{k+1}} \leq \frac{(\frac{M_{k+1}}{k+1})}{M_{k+1}}$, necessariamente $a_i \leq \frac{(\frac{M_{k+1}}{k+1})-j}{M_{k+1}-j}$; poiché però $\frac{M_{k+1}}{k+1} \leq M_{k+1}$ implica $\frac{(\frac{M_{k+1}}{k+1})-j}{M_{k+1}-j} \leq \frac{(\frac{M_{k+1}}{k+1})}{M_{k+1}}$, si ottiene $a_i \leq \frac{(\frac{M_{k+1}}{k+1})-j}{M_{k+1}-j} \leq \frac{(\frac{M_{k+1}}{k+1})}{M_{k+1}} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. Similmente si ottiene la tesi per $i \in [m_h, M_h]$ e per $i \in [M_h, m_{h+1}]$ con $h > k$ qualunque. Avremo quindi che la successione degli a_m convergerà a zero, ovvero $\overline{d}(A) = 0$, ma per costruzione ovviamente A sarà spesso (per ogni n, A_n è un intervallo lungo n in A), dunque per l'esercizio precedente $BD(A) = 1$.

Vediamo in dettaglio la costruzione degli A_n. Per $n = 1$ definiamo $A_1 = \{1\}$; in modo induttivo, supponiamo di aver definito A_k per $k < n+1$ con le richieste prima esposte. Si ha allora che $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ha cardinalità $\frac{n(n+1)}{2}$, perciò $C_n = [1, M_n] \setminus B_n$ ha cardinalità almeno $n-1$ volte tanto (per ipotesi $|B_n| \leq \frac{M_n}{n}$), ovvero almeno $\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$; ora vogliamo definire A_{n+1} come un segmento lungo $n+1$ contenuto in $[M_n + 1, \infty)$ tale per cui $|B_{n+1}| \leq \frac{M_{n+1}}{n+1}$; visto che avremo B_{n+1} con cardinalità $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (stiamo aggiungendo a B_n giusto $n+1$ elementi), e vorremo $|C_{n+1}| \geq \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$ basterà porre $A_{n+1} = [m_{n+1}, M_{n+1}]$ con $m_{n+1} = M_n + \frac{3(n+1)n}{2}$ e $M_{n+1} = m_{n+1} + n + 1$ ($|C_{n+1}| = |C_n| + \frac{3(n+1)n}{2} \geq \frac{(n-1)n(n+1)}{2} + \frac{3(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$). $\square$