Limiti non-Standard, densità di Banach e Insiemi Spessi

Gioacchino Antonelli

March 30, 2015

Esercizio1: *Mostrare le tre seguenti equivalenze, ove a_n è una successione di numeri reali e l è un reale:*

- $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l \Leftrightarrow \exists \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, st(a_\nu) \geq l$
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow l = \max\{st(a_\nu) | \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}, a_\nu \sim l$

Dimostrazione: Utilizzerò nella dimostrazione la caratterizzazione del lim sup come massimo limite, ovvero il valore massimo del limite di una estratta convergente.

- ($\Leftarrow$) Sia $\nu = [\nu(i)]_{i\in\mathbb{N}}$ l'ipernaturale infinito dell'ipotesi e $l \leq r = \mathrm{st}(a_\nu)$. Per ipotesi, lavorando nel modello proposto, per ogni $\epsilon, X = \{i||a_{\nu(i)} - r| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$. Essendo ν infinito, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Y = \{i|\nu(i) > n\} \in \mathcal{U}$. A questo punto costruisco una sottosuccessione convergente a r in questo modo: siano $X_j = \{i||a_{\nu(i)} - r| < \frac{1}{j}\} \in \mathcal{U}$ e $Y_n = \{i|\nu(i) > n\} \in \mathcal{U}$; siano $a_1 = \min(X_1)$, $a_2 = \min(X_2 \cap Y_{\nu(a_1)})$, $a_3 = \min(X_3 \cap Y_{\nu(a_2)})$ e così via. Posso sempre farlo poiché interseco due insieme dell'ultrafiltro e dunque l'intersezione non sarà mai vuota. Ora considero la sottosuccessione $a_{\nu(a_1)}, a_{\nu(a_2)}, \dots$. Essa converge chiaramente a r per costruzione e dunque il massimo limite è almeno r che è maggiore o uguale di l come si voleva.

  ($\Rightarrow$) Se $\limsup_{n\to\infty} a_n = r \geq l$, allora esiste una sottosuccessione $a_{n_i} \to r$. L'ipernaturale $\nu = [n_i]_{i\in\mathbb{N}}$ è chiaramente infinito poiché $n_i \to \infty$ e, inoltre, chiaramente $\mathrm{st}(a_\nu) = r$ poiché per convergenza, dato qualsiasi ϵ, $X = \{i||a_{n_i} - r| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$, poiché X è cofinito e dunque sta nell'ultrafiltro non principale con cui abbiamo costruito il modello.

- ($\Rightarrow$). Nella seconda freccia del precedente punto abbiamo mostrato che se $\limsup_{n\to\infty} a_n = l$ allora esiste ν tale che $\mathrm{st}(a_\nu) = l$. Devo mostrare che questo l è il massimo delle parti standard. Infatti se così non fosse, esisterebbe un μ infinito tale che $\mathrm{st}(a_\mu) = r > l$. Ma allora per la prima freccia del precedente punto sarebbe possibile costruire una sottosuccessione di a_n che converge a r, assurdo per l'ipotesi di massimo limite.

  ($\Leftarrow$) Siccome esiste ν infinito tale che $l = \mathrm{st}(a_\nu)$ allora per la prima freccia del primo punto $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$. Se per assurdo $\limsup_{n\to\infty} a_n = r >$

l, sarebbe possibile la costruzione di un ipernaturale infinito μ tale che $\mathrm{st}(a_\mu) = r > l$, come fatto nella seconda freccia del primo punto, in aperta contraddizione con l'ipotesi che l sia il massimo delle parti standard.

- In maniera del tutto analoga al secondo punto, usando la ovvia identità $-\sup -a_n = \inf a_n$ si dimostra che $\liminf_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow l = \min\{\mathrm{st}(a_\nu) | \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$. A questo punto è chiaro che se a_n ha limite l, allora sia il lim sup che il lim inf fanno l e dunque, l è sia il massimo che il minimo delle parti standard di a_ν al variare di ν fra gli ipernaturali infiniti. Dunque chiaramente $\mathrm{st}(a_\nu) = l \ \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

  Viceversa se le parti standard di a_ν fanno sempre l, allora sia il lim sup che il lim inf fanno l, poiché l è sia il massimo che il minimo delle parti standard. Allora la successione converge per un noto teorema di analisi elementare, e converge a l.

Prima dei prossimi esercizi ricordo alcune definizioni. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Allora la densità asintotica di A resta definita così:

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$$

La densità di Banach di un insieme A (genericamente sottonisieme di $\mathbb{Z}$) è invece definita come segue:

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$$

Abbiamo mostrato a lezione che detti $a_n = \max_{x\in\mathbb{Z}} |A \cap [x+1, x+n]|$, la successione $\frac{a_n}{n}$ ammette limite e questo coincide con $\inf\left(\frac{a_n}{n}\right)$.

Esercizio 2: *$A \subseteq \mathbb{Z}$ è spesso (i.e. ammette intervalli di ogni possibile lunghezza al suo interno) sse $BD(A) = 1$*

Dimostrazione: Se A è spesso, chiaramente $a_n = \max_{x\in\mathbb{Z}} |A \cap [x+1, x+n]| = n$ e dunque, per quanto visto a lezione, $BD(A) = \inf\left(\frac{a_n}{n}\right) = 1$.

Viceversa se $BD(A) = 1$, essendo gli a_n definiti come sopra, ho che $\inf\left(\frac{a_n}{n}\right) = 1$ e dunque $\frac{a_n}{n} \geq 1$ per ogni n, ovvero $a_n \geq n$. Ma per come sono stati definiti gli a_n, non potevano valere più di n. Dunque $a_n = n$ e pertanto esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $|A \cap [x+1, x+n]| = n$. Valendo questo per ogni n, è mostrato che A è spesso.

Esercizio 3: *Esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\bar{d}(A) = 0$ e $BD(A) = 1$*

Dimostrazione: Considero $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n^3 - n + 1, n^3]$. Sicuramente A è spesso, poiché essendo $n^3 < (n+1)^3 - (n+1) + 1$ per ogni $n \geq 1$, A è un'unione di intervalli disgiunti che possono essere arbitrariamente lunghi. Dunque per l'esercizio precedente, $BD(A) = 1$. Sia $a_m = |A \cap [1, m]|$ e $b_m = \frac{a_m}{m}$ per ogni m

naturale. Per come è stato costruito A sicuramente, fissato n e con $0 \leq x < n$, $a_{n^3-x} = (1+2+\cdots+n) - x = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - x$. Dunque, $b_{n^3-x} = \dfrac{n^2+n-2x}{2(n^3-x)}$. In questo caso, sfruttando la limitazione $0 \leq x < n$, $b_{n^3-x} < \dfrac{n^2+n}{2(n^3-n)} = \dfrac{n+1}{2(n^2-1)}$.

Se k non è della forma $n^3 - x$, con $0 \leq x < n$, allora, detto s il più grande intero tale che $k > s^3$, per come è stato costruito A, $a_k = a_{s^3} = \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}$ e $b_k = \frac{a_k}{k} = \frac{a_{s^3}}{k} < \frac{a_{s^3}}{s^3} = \frac{s^2+s}{2s^3} = \frac{s+1}{2s^2}$.

Dunque ricapitolando:

$$b_k < \frac{n+1}{2(n^2-1)} \quad \text{se esiste } n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } k = n^3 - x \text{ con } 0 \leq x < n$$

$$b_k < \frac{n+1}{2n^2} \quad \text{altrimenti, essendo } n \text{ è il piu grande naturale t.c. } k > n^3$$

E' evidente, dunque, che se $k \to \infty$, allora anche gli n delle condizioni vanno a infinito e in tal caso sia $\frac{n+1}{2(n^2-1)}$ che $\frac{n+1}{2n^2}$ vanno a 0, mostrando così che il $\limsup$ di b_k è 0.

Esercizio 4: *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di naturali tali che $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty$, allora detto $A = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, $\bar{d}(A) = 0$*

Dimostrazione:

Lemma: Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente decrescente. Allora $nx_n \to 0$ se $n \to \infty$.

Dimostrazione: Fisso m. Allora per la decrescenza $S = \displaystyle\sum_{n=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{m} x_n \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil x_m \geq \frac{1}{2} m x_m$. Se $m \to \infty$, allora $S \to 0$ per la proprietà di Cauchy, dal momento che l'intera serie converge. Dunque, essendo maggiorata da una quantità che va a 0, $mx_m \to 0$ se $m \to \infty$ come si voleva.

Applicando il lemma a $\{\frac{1}{a_n}\}$, successione che soddisfa le ipotesi, si ottiene che $\frac{n}{a_n} \to 0$ se $n \to \infty$. Sia a questo punto $c_n = |A \cap [1,n]|$ e $d_n = \frac{c_n}{n}$. Se $n = a_i$ per qualche i, allora $d_n = \frac{c_n}{n} = \frac{c_{a_i}}{a_i} = \frac{i}{a_i}$ notando che ovviamente, per come è definito A, $c_{a_i} = i$. Se n non è della forma a_i sia i il più grande indice per cui $n > a_i$. Allora $c_n = c_{a_i}$ e $d_n = \frac{c_n}{n} = \frac{c_{a_i}}{n} < \frac{c_{a_i}}{a_i} = \frac{i}{a_i}$. Dunque ricapitolando:

$$d_n = \frac{i}{a_i} \quad \text{se } n = a_i$$

$$d_n < \frac{i}{a_i} \quad \text{altrimenti, essendo } i \text{ il più grande indice tale che } n > a_i$$

Notando che se $n \to \infty$ allora anche gli $i \to \infty$ e ricordando che per il lemma $\frac{i}{a_i} \to 0$ se $i \to \infty$, il $\limsup_{n\to\infty} d_n = 0$, ovvero $\bar{d}(A) = 0$.