Esercizi per il corso “ultrafiltri e metodi non standard”

Marco Usula

Anno accademico 2014/2015

Notazioni Indicherò con ω l'insieme $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, e con $\mathbb{N}$ l'insieme $\omega \setminus \{0\}$.
I simboli $\subset$ e $\supset$ indicano inclusioni *strette* tra insiemi.

1 Esercizi 24-2-2015

In diversi esercizi mi servirà il seguente

Lemma 1.1. *Sia $\mathcal{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di I con la FIP. Allora esiste un filtro su I che contiene $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Definiamo induttivamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &:= \mathcal{S} \\
\mathcal{S}_{2n+1} &:= \{\text{intersezioni finite di elementi di } \mathcal{S}_{2n}\} \\
\mathcal{S}_{2n+2} &:= \{\text{sovrainsiemi di elementi di } \mathcal{S}_{2n+1}\}
\end{aligned}$$

e chiamiamo

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{S}_n.$$

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{S}'$ è un filtro. Osserviamo che questo implicherà che $\mathcal{S}'$ è il *più piccolo* filtro contenente $\mathcal{S}$, in quanto ovviamente ogni filtro contenente $\mathcal{S}$ deve contenere $\mathcal{S}_n$ per ogni n. Innanzitutto osserviamo che per ogni $n \geq 0$ si ha $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_{n+1}$. Ora, se $X, Y \in \mathcal{S}'$, allora $X, Y \in \mathcal{S}_n$ per qualche n, e quindi per definizione $X \cap Y \in \mathcal{S}_{n+2} \subseteq \mathcal{S}'$. Inoltre, se $X \in \mathcal{S}'$ e $Y \supseteq X$, allora $X \in \mathcal{S}_n$ per un certo n, e quindi $Y \in \mathcal{S}_{n+2}$ per definizione. Dimostriamo ora per induzione su n che $\mathcal{S}_n$ ha la FIP (e quindi in particolare non contiene $\emptyset$).
Per $n = 0$ la tesi è vera per ipotesi. Supponiamo la tesi vera per $2n$: allora $\mathcal{S}_{2n+1}$ ha la FIP, in quanto un'intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}_{2n+1}$ è un'intersezione finita di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}_{2n}$, e quindi è un'intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}_{2n}$, che è quindi non vuota perchè $\mathcal{S}_{2n}$ ha la FIP. Supponiamo ora la tesi vera per $2n+1$: allora $\mathcal{S}_{2n+2}$ ha la FIP. Infatti, se esistessero $X_1, ..., X_k \in \mathcal{S}_{2n+2}$ tali che $X_1 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset$, per definizione di $\mathcal{S}_{2n+2}$ esisterebbero $Y_1, ..., Y_k \in \mathcal{S}_{2n+1}$ tali che $Y_i \subseteq X_i$ per ogni i; a questo punto, si avrebbe $Y_1 \cap \cdots \cap Y_k \subseteq X_1 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset$, assurdo in quanto $\mathcal{S}_{2n+1}$ ha la FIP per ipotesi induttiva.
Ne consegue che $\mathcal{S}_n$ non contiene $\emptyset$ per ogni n, e quindi $\mathcal{S}'$ non contiene $\emptyset$, da cui che $\mathcal{S}'$ è un filtro. $\square$

Esercizio 1.2. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su un insieme I. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.
2. Se $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$, allora esiste i tale che $A_i \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ è un filtro massimale di I (rispetto all'inclusione).

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Supponiamo che $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. Se per assurdo $A_i \notin \mathcal{F}$ per ogni i, allora, per il punto 1, $A_i^c \in \mathcal{F}$ per ogni i, e quindi si ha $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \in \mathcal{F}$, da cui che $(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c)^c = A_1 \cup \cdots \cup A_n \notin \mathcal{F}$, assurdo.
2. $(2 \Rightarrow 3)$ Supponiamo per assurdo che esista $\mathcal{F}'$ filtro su I tale che $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, e sia $X \in \mathcal{F}' \backslash \mathcal{F}$. Allora $X \cup X^c = I \in \mathcal{F}$, e quindi per il punto 2 si ha $X \in \mathcal{F}$ o $X^c \in \mathcal{F}$. Ma la prima è falsa per la scelta di X, e quindi $X^c \in \mathcal{F}$, e questo è assurdo perchè si avrebbe $X, X^c \in \mathcal{F}'$ da cui $\emptyset = X \cap X^c \in \mathcal{F}'$.
3. $(3 \Rightarrow 1)$ Se esiste $A \subseteq I$ tale che $A, A^c \notin \mathcal{F}$, allora consideriamo la famiglia $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cup \{A\}$. Allora $\mathcal{S}$ ha la FIP. Infatti, dato che $\mathcal{F}$ ha la FIP ed è chiuso per intersezioni finite, se $\mathcal{S}$ non avesse la FIP dovrebbe essere $A = \emptyset$ oppure $A \cap X = \emptyset$ per qualche $X \in \mathcal{F}$. Chiaramente $A \neq \emptyset$ (in quanto altrimenti $A^c = I \in \mathcal{F}$); inoltre, se fosse $A \cap X = \emptyset$ si avrebbe $X \subseteq A^c$, da cui $A^c \in \mathcal{F}$, assurdo per ipotesi su $\mathcal{F}$. Ora, dato che $\mathcal{S}$ ha la FIP, $\mathcal{S}$ è contenuto in un filtro su I, che contiene $\mathcal{F}$ strettamente in quanto contiene A che non sta in $\mathcal{F}$. Ne consegue che $\mathcal{F}$ non è massimale.

□

Esercizio 1.3. Una *misura a due valori finitamente additiva* su un insieme non vuoto I è una mappa $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0, \mu(I) = 1$, e per ogni A, B sottoinsiemi di I disgiunti, si ha $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

1. Se $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ è una misura a due valori f.a., allora la famiglia $\mathcal{U}_\mu = \{A \subseteq I : \mu(A) = 1\}$ è un ultrafiltro. Se μ è inoltre *non atomica* (ossia per ogni $i \in I$ si ha $\mu(\{i\}) = 0$) allora $\mathcal{U}_\mu$ è non principale.
2. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, allora la funzione $\mu_\mathcal{U} : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ definita ponendo $\mu_\mathcal{U}(A) = 1 \iff A \in \mathcal{U}$, è una misura a due valori f.a. Se inoltre $\mathcal{U}$ è non principale, allora $\mu_\mathcal{U}$ è non atomica.

Dimostrazione.

1. Verifichiamo le proprietà di ultrafiltro.
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = 1$ per ipotesi, e quindi $\emptyset \notin \mathcal{U}_\mu$ e $I \in \mathcal{U}_\mu$.
   (b) Sia $A \in \mathcal{U}_\mu$: allora $\mu(A) = 1$. Sia $B \supseteq A$. Allora $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$ e $\mu(A) = 1$, quindi deve essere necessariamente $\mu(B) = 1$. Ne consegue che $B \in \mathcal{U}_\mu$.

(c) Siano $A, B \in \mathcal{U}_\mu$. Mostriamo che $\mu(A\backslash B) = \mu(B\backslash A) = \mu((A \cup B)^c) = 0$. Si ha infatti

$$B = (B\backslash A) \sqcup A$$

e quindi

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(B) \\ &= \mu(B\backslash A) + \mu(A) \\ &= \mu(B\backslash A) + 1 \end{aligned}$$

da cui che $\mu(B\backslash A) = 0$. Analogamente si dimostra che $\mu(A\backslash B) = 0$. Inoltre, $A \cup B \supseteq A$, e quindi per il punto precedente si ha $A \cup B \in \mathcal{U}_\mu$ ossia $\mu(A \cup B) = 1$, da cui che $\mu((A \cup B)^c) = 0$. Ora osserviamo che I si partiziona negli insiemi $(A \cup B)^c, A\backslash B, B\backslash A, A \cap B$. Per la finita additività, esattamente uno di questi quattro deve avere misura 1: allora, per esclusione, questo deve essere $A \cap B$, ossia $A \cap B \in \mathcal{U}_\mu$.

(d) Supponiamo che $A \notin \mathcal{U}_\mu$. Allora $\mu(A) = 0$, e quindi dato che $\mu(I) = 1$ deve essere $\mu(A^c) = 1$. Ne consegue che $A^c \in \mathcal{U}_\mu$.

Ora, sia μ non atomica. Se $\mathcal{U}_\mu$ fosse principale, esisterebbe $i \in I$ tale che $\{i\} \in \mathcal{U}_\mu$, ossia $\mu(\{i\}) = 1$, e questo è assurdo per l'ipotesi di non atomicità di μ.

2. Verifichiamo le proprietà di misura a due valori f.a. .

   (a) $\emptyset \notin \mathcal{U}$ e $I \in \mathcal{U}$, da cui che $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = 1$.

   (b) Siano A, B sottoinsiemi disgiunti di I. Distinguiamo diversi casi:

      i. se $A \notin \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$, allora $A \cup B \notin \mathcal{U}$ perchè $\mathcal{U}$ è ultrafiltro: dunque $\mu(A) + \mu(B) = 0 + 0 = 0 = \mu(A \cup B)$;

      ii. se $A \notin \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$, allora $A \cup B \in \mathcal{U}$ perchè $\mathcal{U}$ è chiuso per soprainsieme: dunque $\mu(A) + \mu(B) = 0 + 1 = 1 = \mu(A \cup B)$;

      iii. se $A \in \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$, allora si ragiona come nel caso precedente;

      iv. il caso con $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$ *non* si può verificare: infatti, se così fosse, essendo $\mathcal{U}$ un filtro dovrebbe essere $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{U}$, assurdo.

   Ne consegue che μ è finitamente additiva.

   Sia ora $\mathcal{U}$ non principale. Allora, se $i \in I$, si ha $\{i\} \notin \mathcal{U}$, e quindi $\mu(\{i\}) = 0$: dalla generalità di i, si ha che μ è non atomica.

□

Esercizio 1.4. Sia I un insieme non vuoto, e sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra filtri su I e ideali propri dell'anello $\mathbb{K}^I$. Tale corrispondenza biunivoca si restringe ad una corrispondenza biunivoca tra ideali massimali e ultrafiltri su I.

Dimostrazione. Presa $f \in \mathbb{K}^I$, sia $\mathcal{V}(f)$ il luogo degli zeri di f. Definiamo

$$\begin{aligned} \psi : \text{Filtri}(I) &\to \text{Ideali propri}\left(\mathbb{K}^I\right) \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathfrak{a}_\mathcal{F} := \{f : I \to \mathbb{K} : \mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

e dimostriamo che ψ è ben definita ed è una bigezione.

1. La ψ è ben definita, ossia $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ è un ideale proprio. Infatti:

   (a) Se $f, g \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, allora $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V}(g) \in \mathcal{F}$. Allora $\mathcal{V}(f-g) \supseteq \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g) \in \mathcal{F}$, e quindi $\mathcal{V}(f-g) \in \mathcal{F}$, da cui che $f-g \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$. Questo prova che $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ è un sottogruppo additivo.

   (b) Se $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, e $g \in \mathbb{K}^I$, allora $\mathcal{V}(fg) \supseteq \mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}$ da cui che $fg \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$.

   (c) Se per assurdo $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ fosse tutto l'anello, allora la mappa $1 : I \to \mathbb{K}$ che ad ogni elemento di I associa 1, starebbe in $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$. Ma questa mappa ha luogo di zeri vuoto, e quindi si avrebbe $\emptyset \in \mathcal{F}$, assurdo.

2. La ψ è iniettiva. Infatti, se $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{a}_{\mathcal{G}}$, allora per ogni $f \in \mathbb{K}^I$ si ha che $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F} \iff \mathcal{V}(f) \in \mathcal{G}$. Ma, dato che ogni sottoinsieme di I è luogo di zeri di qualche funzione in $\mathbb{K}^I$, si ha che per ogni $X \subseteq I$ si ha $X \in \mathcal{F} \iff X \in \mathcal{G}$, ossia $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

3. La ψ è suriettiva. Infatti, sia $\mathfrak{a}$ un ideale proprio di $\mathbb{K}^I$, e definiamo

   $$\mathcal{F}_{\mathfrak{a}} := \{\mathcal{V}(f) : f \in \mathfrak{a}\}.$$

   Dimostriamo che $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ è un filtro.

   (a) $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$, in quanto se per assurdo esistesse $f \in \mathfrak{a}$ che non si annulla mai, allora, essendo la mappa $g : I \to \mathbb{K}$ tale che $g(t) = f(t)^{-1}$ l'inverso moltiplicativo di f, $\mathfrak{a}$ conterrebbe elementi invertibili e quindi sarebbe l'ideale banale, assurdo.

   (b) Se $X \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ e $Y \supseteq X$, allora sia $f_X \in \mathfrak{a}$ tale che $\mathcal{V}(f_X) = X$, e sia $g \in \mathbb{K}^I$ tale che $\mathcal{V}(g) = Y$. Allora chiaramente $\mathcal{V}(gf_X) = Y$. Inoltre, essendo $\mathfrak{a}$ un ideale, $gf_X \in \mathfrak{a}$, e quindi $Y \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$.

   (c) Se $X, Y \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$, siano $f_X, f_Y \in \mathfrak{a}$ aventi luoghi di zeri X e Y rispettivamente. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che f_X, f_Y abbiano immagine in $\{0,1\}$ (infatti, definiamo $g_X : I \to \mathbb{K}$ in questo modo: se $f_X(t) = 0$, allora $g_X(t) = 0$, e se $f_X(t) \neq 0$, allora $g_X(t) = f_X(t)^{-1}$; essendo $\mathfrak{a}$ un ideale, si ha che $f_X g_X \in \mathfrak{a}$; inoltre, per ogni $t \in I$, $f_X g_X(t) \in \{0,1\}$, e $\mathcal{V}(f_X g_X) = \mathcal{V}(f_X) = X$). Definiamo

   $$\begin{aligned} h : I &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 & f_X(t) = 1 \wedge f_Y(t) = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \end{aligned}$$

   Osserviamo che $h \in \mathfrak{a}$, in quanto $h = hf_X$: infatti, hf_X ha valori in $\{0,1\}$, e quindi basta dimostrare che per ogni $t \in I$ si ha $hf_X(t) = 1 \iff h(t) = 1$; ma $hf_X(t) = 1 \Rightarrow h(t) = 1$ ovviamente, mentre $h(t) = 1$ implica $f_X(t) = 1$ per definizione di h, e quindi $hf_X(t) = 1$. Allora anche $h + f_Y \in \mathfrak{a}$. Inoltre, si ha per definizione di h

   $$\mathcal{V}(h) = X \cup Y^c.$$

   Osserviamo ora che h e f_Y non assumono mai contemporaneamente il valore 1, per definizione di h. Allora $h(t) + f_Y(t) = 0 \iff h(t) = f_Y(t) = 0$, ossia

   $$\begin{aligned} \mathcal{V}(h + f_Y) &= \mathcal{V}(h) \cap \mathcal{V}(f_Y) \\ &= (X \cup Y^c) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \cup (Y^c \cap Y) \\ &= X \cap Y \end{aligned}$$

e quindi abbiamo finito in quanto $h + f_Y \in \mathfrak{a}$.

Ora, osserviamo che

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathfrak{a}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathcal{G}} :$$

infatti, se $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ allora $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{G}$ da cui che $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{G}}$. Viceversa,

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{a}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{b}} :$$

infatti, se $X \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$, allora esiste una funzione $f \in \mathfrak{a}$ tale che $\mathcal{V}(f) = X$: ma allora $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{b}}$, e quindi $X \in \mathcal{F}_{\mathfrak{b}}$. Ne consegue che se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, allora $\mathfrak{a}_{\mathcal{U}}$ è massimale, mentre se $\mathfrak{a}$ è massimale allora $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ è massimale e quindi è un ultrafiltro.

□

Esercizio 1.5. Dimostrare che uno spazio topologico X è compatto se e solo se per ogni successione $(x_i)_{i\in I}$ e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I la successione ammette $\mathcal{U}$-limite.

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, e supponiamo per assurdo che esista una successione $(x_i)_{i\in I}$ in X che non ha $\mathcal{U}$-limite. Allora, per ogni $x \in X$, esiste un aperto U_x di X contenente x e tale che

$$A_x := \{i \in I : x_i \in U_x\} \notin \mathcal{U}.$$

Chiaramente, $\{U_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X (perchè $x \in U_x$ per ogni $x \in X$) e quindi, essendo X compatto, ammette un sottoricoprimento finito, diciamo $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$. Osserviamo ora che

$$A_{y_1} \cup ... \cup A_{y_k} = I :$$

infatti, per ogni $i \in I$, $x_i \in U_{y_j}$ per qualche $j \in \{1, ..., k\}$ (essendo $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$ un ricoprimento di X) e quindi $i \in A_{y_j}$. Allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, deve esistere $j \in \{1, ..., k\}$ tale che $A_{y_j} \in \mathcal{U}$, e questo è assurdo per ipotesi sugli A_x. Ne consegue la tesi.
$(\Leftarrow)$ Dimostriamo che X soddisfa la seguente definizione equivalente di compattezza: *se $\{C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi di X aventi la FIP, allora tale famiglia ha intersezione non vuota.* Dato che $\{C_i\}_{i\in I}$ ha la FIP, esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X contenente i C_i. Consideriamo ora la X-successione $x \mapsto x$. Allora, per ipotesi, la successione ha $\mathcal{U}$-limite. Questo significa che esiste un $x_0 \in X$ tale che, per ogni aperto V di X contenente x, $V \in \mathcal{U}$. Vogliamo dimostrare che $x_0 \in C_i$ per ogni i. Se per assurdo $x_0 \notin C_i$, allora $x_0 \in C_i^c$ che è aperto. Ne consegue che $C_i^c \in \mathcal{U}$: ma questo è assurdo, in quanto $C_i \in \mathcal{U}$. Ne consegue la tesi. □

Esercizio 1.6. Dimostrare il teorema di Tychonoff: data una famiglia $\{X_j\}_{j\in J}$ di spazi topologici compatti, il prodotto $Y = \prod_{j\in J} X_j$ è compatto.

Dimostrazione. Sfruttando l'esercizio precedente, dimostriamo che per ogni insieme I e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, ogni I-successione su Y ha $\mathcal{U}$-limite. Sia $(y_i)_{i\in I}$ una I-successione su Y. Abbiamo $y_i = \left(x_j^{(i)}\right)_{j\in J}$ per certi $x_j^{(i)} \in X_j$ al variare di $i \in I, j \in J$. Allora, essendo X_j tutti compatti, per ogni $j \in J$, la I-successione $\left(x_j^{(i)}\right)_{i\in I}$ ha $\mathcal{U}$-limite, diciamo $\tilde{x}_j$. Consideriamo l'elemento $\tilde{y} = (\tilde{x}_j)_{j\in J}$, e dimostriamo che $\tilde{y}$ è un $\mathcal{U}$-limite per la I-successione $(y_i)_{i\in I}$. Sia V un aperto di Y contenente $\tilde{y}$.

Allora, per definizione di topologia prodotto, esistono $U_j \subseteq X_j$ aperti tali che $U_j = X_j$ per quasi ogni $j \in J$ (tutti tranne un numero finito), e

$$\tilde{y} \in \prod_{j \in J} U_j \subseteq V.$$

Ne consegue che per ogni $j \in J$ si ha $\tilde{x}_j \in U_j$. Definiamo ora $A_j := \left\{ i \in I : x_j^{(i)} \in U_j \right\}$. Dato che $\tilde{x}_j$ è il limite della I-successione $\left(x_j^{(i)} \right)_{i \in I}$, si ha che $A_j \in \mathcal{U}$. Ora, abbiamo

$$\begin{aligned}
\{i \in I : y_i \in V\} &\supseteq \left\{ i \in I : y_i \in \prod_{j \in J} U_j \right\} \\
&= \left\{ i \in I : (\forall j \in J) \left(x_j^{(i)} \in U_j \right) \right\} \\
&= \bigcap_{j \in J} \left\{ i \in I : x_j^{(i)} \in U_j \right\} \\
&= \bigcap_{j \in J} A_j.
\end{aligned}$$

Ora, se $U_j = X_j$ allora chiaramente $A_j = I$. Dato che $U_j = X_j$ per quasi tutti i j, si ha che $A_j \neq I$ solo per un numero finito di indici, diciamo $j_1, ..., j_k$, e quindi

$$\bigcap_{j \in J} A_j = A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k} \in \mathcal{U}.$$

Ne consegue che $\{i \in I : y_i \in V\} \in \mathcal{U}$, e quindi dalla generalità di V si ha che $\tilde{y}$ è un $\mathcal{U}$-limite per la I-successione $(y_i)_{i \in I}$. $\square$

2 Esercizi 2-3-2015

Esercizio 2.1. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Sono equivalenti:

1. $\mathcal{U}$ non è principale.
2. Se $X \subseteq I$ è finito, allora $X \notin \mathcal{U}$.
3. $\mathcal{U}$ estende il filtro di Frechet.

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia $\mathcal{U}$ non principale, e supponiamo per assurdo che contenga $X = \{x_1, ..., x_k\}$. Dato che $X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_k\}$, essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro deve essere $\{x_i\} \in \mathcal{U}$ per qualche $i \in \{1, ..., k\}$. Ma allora $\mathcal{U}$ è l'ultrafiltro principale generato da x_i, assurdo.
2. $(2 \Rightarrow 3)$ Se X è cofinito, allora X^c è finito, e quindi per il punto 2 $X^c \notin \mathcal{U}$, da cui che, essendo $\mathcal{U}$ ultrafiltro, $X \in \mathcal{U}$.

3. $(3 \Rightarrow 1)$ Per ogni $i \in I$, l'insieme $I \backslash \{i\}$ è cofinito, e quindi sta in $\mathcal{U}$ perchè sta nel filtro di Frechet. Ne consegue che $\{i\} \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$, e quindi $\mathcal{U}$ è non principale.

$\square$

Esercizio 2.2. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, $\mathcal{V}$ un ultrafiltro su J, $\mathcal{W}$ un ultrafiltro su K.

1. Verificare che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro su $I \times J$.
2. Verificare che se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono principali se e solo se lo è $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
3. Verificare che esistono ultrafiltri non principali $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ tali che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che se $A \in \mathcal{P}(I \times J)$, allora definiamo per $i \in I$ la fibra verticale $A_i = \{j \in J : (i,j) \in A\}$. Allora $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ se e solo se l'insieme $\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\}$ sta in $\mathcal{U}$.

1. Verifichiamo che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro.
   Se $\emptyset \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, allora per ogni $i \in I$ si ha $\emptyset_i = \emptyset$: dunque, per ogni $i \in I$, $\emptyset_i \notin \mathcal{V}$, e quindi $\{i \in I : \emptyset_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$, da cui che $\emptyset \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
   Se $A, B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, osserviamo che

   $$\begin{aligned} (A \cap B)_i &= \{j \in J : (i,j) \in A \cap B\} \\ &= \{j \in J : (i,j) \in A \wedge (i,j) \in B\} \\ &= \{j \in J : (i,j) \in A\} \cap \{j \in J : (i,j) \in B\} \\ &= A_i \cap B_i. \end{aligned}$$

   Allora, dato che per ogni $i \in I$ si ha $A_i \in \mathcal{V} \wedge B_i \in \mathcal{V} \Rightarrow A_i \cap B_i \in \mathcal{V}$, abbiamo che

   $$\begin{aligned} \{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} &= \{i \in I : A_i \cap B_i \in \mathcal{V}\} \\ &\supseteq \{i \in I : A_i \in \mathcal{V} \wedge B_i \in \mathcal{V}\} \\ &= \{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \cap \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\}. \end{aligned}$$

   Entrambi questi insiemi stanno in $\mathcal{U}$, in quanto $A, B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Dato che $\mathcal{U}$ è chiuso per intersezioni e soprainsiemi, abbiamo che $\{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e quindi $A \cap B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
   Se $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, e $B \supseteq A$, allora $B_i \supseteq A_i$ per ogni $i \in I$. Questo significa che $A_i \in \mathcal{V} \Rightarrow B_i \in \mathcal{V}$, e quindi

   $$\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \subseteq \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\}$$

   e quindi, dato che il primo insieme sta in $\mathcal{U}$ in quanto $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, si ha che anche il secondo ci sta, ossia $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
   Se $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, allora $\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$, da cui che $\{i \in I : (A_i)^c \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Ora, osserviamo che $(A^c)_i = (A_i)^c$ per ogni i: infatti, $x \in (A^c)_i$ sse $(i,x) \in A^c$ sse $(i,x) \notin A$ sse $x \notin A_i$ sse $x \in (A_i)^c$. Ne consegue che $\{i \in I : (A^c)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e quindi che $A^c \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

2. Dati $x \in I$ e $y \in J$, si ha che $\{x\} \in \mathcal{U}$ e $\{y\} \in \mathcal{V}$ se e solo se $\{(x,y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti $\{x\} \in \mathcal{U}$ e $\{y\} \in \mathcal{V}$ implica $\{i \in I : \{(x,y)\}_i \in \mathcal{V}\} = \{x\} \in \mathcal{U}$, da cui che $\{(x,y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Viceversa, se $\{(x,y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, allora $\{i \in I : \{(x,y)\}_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$: quest'ultimo insieme può essere solo $\{x\}$ se $\{(x,y)\}_x = \{y\} \in \mathcal{V}$, perchè se non fosse $\{x\}$ allora sarebbe vuoto, assurdo perchè $\mathcal{U}$ non contiene il vuoto. Ne consegue la tesi.

3. Scegliamo $I = \mathbb{N}$, e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ ultrafiltri non principali contenenti rispettivamente l'insieme dei pari e l'insieme dei dispari. $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ esistono, in quanto se $\mathcal{F}$ è il filtro di Fréchet, allora $\mathcal{F}$ non contiene nè l'insieme P dei pari nè l'insieme D dei dispari, e quindi $\mathcal{F} \cup \{P\}$ e $\mathcal{F} \cup \{D\}$ hanno entrambe la FIP (si veda la dimostrazione dell'Esercizio 1.2) da cui che ognuna di esse è contenuta in un filtro, che a sua volta è contenuto in un ultrafiltro che estende il filtro di Fréchet. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{N}^2$ costituito dalle coppie con prima coordinata pari e seconda coordinata dispari. Allora le fibre verticali sono

$$A_n = \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in A\} = \begin{cases} D & n \in P \\ \emptyset & n \in D \end{cases} :$$

allora

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{V}\} = P \in \mathcal{U}$$

da cui che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, mentre

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{V},$$

da cui che $A \notin \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. Ne consegue che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

$\square$

Esercizio 2.3. Dimostrare il teorema di Ramsey infinito per k generico, ossia: *se X è un insieme infinito, allora per ogni $k, r \in \mathbb{N}$, fissata una r-colorazione $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r = [X]^k$, esiste $H \subseteq X$ infinito tale che $[H]^k$ sia monocromatico.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità consideriamo $X = \mathbb{N}$. Infatti, essendo X infinito, X ha un sottoinsieme numerabile (e quindi identificabile con $\mathbb{N}$), e se la tesi vale per $\mathbb{N} \subseteq X$ allora vale ovviamente anche per X. Definiamo ora, per $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_k^n = \left\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k : n \leq x_1 < \cdots < x_k\right\}.$$

Allora possiamo identificare in modo univoco $[\mathbb{N}]^k$ con Δ_k^1, associando ad un insieme di k elementi distinti di $\mathbb{N}$ la k-upla ordinata in modo crescente di tali elementi. Consideriamo ora un ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$, e definiamo induttivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\otimes 1} &= \mathcal{U} \\ \mathcal{U}^{\otimes (s+1)} &= \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}^{\otimes s}. \end{aligned}$$

Allora si verifica induttivamente che $\mathcal{U}^{\otimes k}$ è un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}^k$. Dimostriamo per induzione su k che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_k^n \in \mathcal{U}^{\otimes k}$.

1. ($k = 1$) Si ha $\Delta_1^n = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ che ha complementare finito in $\mathbb{N}$. Dato che $\mathcal{U}$ è non principale, deve essere $\Delta_1^n \in \mathcal{U}$.

2. (Vero per $k \geq 1$, mostro per $k + 1$) Abbiamo

$$\Delta_{k+1}^n \in \mathcal{U}^{\otimes (k+1)} \iff \left\{m \in \mathbb{N} : \left(\Delta_{k+1}^n\right)_m \in \mathcal{U}^{\otimes k}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Ora, si ha

$$\begin{aligned}\left(\Delta^n_{k+1}\right)_m &= \left\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k : (m, x_1, ..., x_k) \in \Delta^n_{k+1}\right\} \\ &= \left\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k : n \leq m < x_1 < \cdots < x_k\right\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & m < n \\ \Delta^{m+1}_k & m \geq n \end{cases}\end{aligned}$$

e quindi, per ipotesi induttiva, si ha che

$$\Delta^n_{k+1} \in \mathcal{U}^{\otimes(k+1)} \iff \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\} \in \mathcal{U}$$

e quest'ultima condizione è verificata in quanto $\mathcal{U}$ è non principale, quindi non può contenere l'insieme $\{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, che è finito. Ne consegue che $\Delta^n_{k+1} \in \mathcal{U}^{\otimes(k+1)}$ per ogni n.

Quanto dimostrato implica in particolare che $\Delta^1_k \in \mathcal{U}^{\otimes k}$. Ma, dall'identificazione $[\mathbb{N}]^k \equiv \Delta^1_k$, abbiamo che $\Delta^1_k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, e quindi per le proprietà di ultrafiltro deve essere $C_s \in \mathcal{U}^{\otimes k}$ per qualche $s \in \{1, ..., r\}$. Dato che $\mathcal{U}^{\otimes k}$ è un ultrafiltro non principale, si ha che C_s deve essere infinito. Allora, per quanto visto a lezione, deve esistere $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito e tale che $[H]^k \in C_s$. Ne consegue la tesi.

□

3 Esercizi 3-3-2015

Esercizio 3.1. Dimostrare che se $(P, \leq)$ è un ordine parziale infinito, allora esiste $X \subseteq P$ infinito che è una catena o un'anticatena.

Dimostrazione. Diamo una 2-colorazione $C \sqcup N$ di $[P]^2$ in questo modo: se $\{x, y\} \in [P]^2$, allora $\{x, y\} \in C$ se e solo se $x < y$ o $y < x$. Per il Teorema di Ramsey con $r = 2$ e $k = 2$, esiste un sottoinsieme $X \subseteq P$ infinito e tale che $[X]^2$ sia monocromatico.

1. Se $[X]^2 \subseteq C$, allora questo vuol dire che per ogni $x, y \in X$ si ha $x = y$, oppure $x < y$, oppure $x > y$, ossia che X è una catena.
2. Se $[X]^2 \subseteq N$, allora questo vuol dire che per ogni $x, y \in X$, se $x \neq y$ allora $x \not< y$ e $y \not< x$, ossia x e y non sono confrontabili. Ne consegue che X è un'anticatena.

□

Esercizio 3.2. Dando per buono il Teorema di Schur infinito, dimostrare la sua versione finita, ossia: *per ogni $r \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, comunque si scelga una r-colorazione di $\{1, ..., n\}$, esistono $a, b \in \{1, ..., n\}$ tali che $a < b < a + b \leq n$ siano monocromatici.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una r-colorazione $C^{(n)}_1 \sqcup \cdots \sqcup C^{(n)}_r$ di $\{1, ..., n\}$ che non ammette triple di Schur. Fissiamo $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni $a \in \mathbb{N}$, definiamo

$$C_i(a) = \left\{n \in \mathbb{N} : a \in C^{(n)}_i\right\}$$

al variare di i in $\{1,...,r\}$. Allora osserviamo che, per ogni $a \in \mathbb{N}$, $C_1(a) \cup \cdots \cup C_r(a) \in \mathcal{U}$: infatti, $n \notin C_i(a)$ per ogni $i \in \{1,...,r\}$ se e solo se $a \notin C_i^{(n)}$ per ogni $i \in \{1,...,r\}$, ossia se e solo se $a \notin \{1,...,n\}$, ossia se e solo se $n < a$; allora, il complementare di $C_1(a) \cup \cdots \cup C_r(a)$ in $\mathbb{N}$ è finito, e quindi dato che $\mathcal{U}$ è non principale abbiamo che $C_1(a) \cup \cdots \cup C_r(a) \in \mathcal{U}$. Dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esisterà esattamente un $i \in \{1,...,r\}$ tale che $C_i(a) \in \mathcal{U}$. Allora definiamo

$$D_i = \{a \in \mathbb{N} : C_i(a) \in \mathcal{U}\}$$

e, per costruzione, la famiglia $\{D_i : i \in \{1,...,r\}\}$ è una r-colorazione di $\mathbb{N}$. Mostriamo che tale colorazione non ammette triple di Schur. Se esistessero $a < b \in \mathbb{N}$ tali che $a, b, a+b \in D_i$ per un certo $i \in \{1,...,r\}$, allora si avrebbe $C_i(a), C_i(b), C_i(a+b) \in \mathcal{U}$: dato che $\mathcal{U}$ ha la FIP, esiste $n \in C_i(a) \cap C_i(b) \cap C_i(a+b)$, e per tale n si ha

$$a, b, a+b \in C_i^{(n)},$$

assurdo in quanto per ipotesi la r-colorazione di $\{1,...,n\}$ data da $C_1^{(n)}, ..., C_r^{(n)}$ non aveva triple di Schur. □

Esercizio 3.3. Dimostrare che il Teorema delle differenze finito (Tdf) implica il seguente: *per ogni r-colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ di $\mathbb{N}$, esiste C_i che è un Δ_f-set.*

Dimostrazione. Fissiamo una r-colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ di $\mathbb{N}$ e fissiamo m: allora, per il Tdf, esiste n tale che, per ogni r-colorazione di $\{1,...,n\}$ esiste un certo H_m con $|H_m| = m$ e $\Delta(H_m) \subseteq \{1,...,n\}$ monocromatico; la r-colorazione di $\mathbb{N}$ induce una r-colorazione di $\{1,...,n\}$, e quindi tale H_m è anche monocromatico rispetto alla colorazione di $\mathbb{N}$. Fissata la scelta degli H_m per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo una r-colorazione di $\mathbb{N}$ in questo modo: $m \in D_i \iff \Delta(H_m) \subseteq C_i$. Ovviamente $D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r = \mathbb{N}$, e quindi, per il teorema di Ramsey, uno dei D_i è infinito. Ne consegue che D_i è illimitato superiormente, e quindi esiste m arbitrariamente grande tale che $\Delta(H_m) \subseteq C_i$. Dato che $|H_m| = m$, si ha che C_i è un Δ_f-set. □

Osservazione 3.4. Ho usato l'Assioma di Scelta per non appesantire troppo la dimostrazione, ma questo non è essenziale: si possono fare scelte non arbitrarie di n e degli H_m utilizzando il buon ordinamento dei numeri naturali.

Esercizio 3.5. Trovare un insieme Δ_f-set ma non Δ-set.

Dimostrazione. Qualunque insieme A avente le seguenti proprietà:

1. A è un Δ_f-set;
2. A *non* è sindetico;
3. se X è infinito e $\Delta(X) \subseteq A$, allora X è sindetico;

non può essere un Δ-set. Infatti, vale il seguente

Lemma 3.6. *Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Se X è sindetico, allora $\Delta(X)$ è sindetico.*

Dimostrazione. Sia $X = \{x_1, x_2, ...\}$ sindetico, e chiamiamo $Y = \{x_2 - x_1, x_3 - x_1, ...\}$. Allora Y è sindetico in quanto Y è un traslato di X e quindi i "buchi" di Y hanno la stessa lunghezza dei "buchi" di X. Ora, $Y \subseteq \Delta(X)$ ovviamente: dato che un insieme contenente un sindetico è ovviamente sindetico, si ha che $\Delta(X)$ è sindetico. □

Dunque, se A fosse un Δ-set, allora esisterebbe X infinito tale che $\Delta(X) \subseteq A$, da cui che, per la proprietà 3, X sarebbe sindetico, e quindi lo sarebbe anche $\Delta(X)$ per il lemma: questo è assurdo in quanto A *non* è sindetico per la proprietà 2.
Diamo ora un esempio di un insieme A che verifica le proprietà $1, 2, 3$.
Definiamo p_1 numero primo scelto a caso, e p_{n+1} il più piccolo primo maggiore di $2np_n$. Definiamo ora

$$\begin{aligned} A_n &= \{kp_n\}_{k=1}^{n} \\ A &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

1. A è un Δ_f-set. Infatti, preso $m \in \mathbb{N}$, l'insieme $H = \{p_m, ..., mp_m\}$ ha cardinalità m ed è tale che $\Delta(H) = \{p_m, ..., (m-1)p_m\} \subseteq A$.

2. A *non* è sindetico. Infatti, il massimo di A_n è np_n e il minimo di A_{n+1} è $> 2np_n$, dunque il gap tra A_n e A_{n+1} è lungo almeno np_n, che diverge al divergere di n.

3. Se X è infinito e $\Delta(X) \subseteq A$, allora X è sindetico. Infatti, siano $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ gli elementi di X. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\in A_i \\ x_3 - x_1 &\in A_j \\ x_3 - x_2 &\in A_k \end{aligned}$$

con $i, j, k \in \mathbb{N}$. Dato che $x_1 < x_2 < x_3$, si ha $x_2 - x_1 < x_3 - x_1$ e $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, da cui che $i \le j$ e $k \le j$. Inoltre, $j \neq 1$, in quanto se fosse $j = 1$ allora dovrebbe essere anche $i = k = 1$ e quindi avremmo $x_2 - x_1 = x_3 - x_1 = x_3 - x_2 = p_1$, il che è assurdo in quanto contraddice le disuguaglianze strette precedenti. Ora, dato che $x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$, si ha

$$A_j \cap (A_k + A_i) \neq \emptyset.$$

Dato che $A_i \subseteq [p_i, ip_i]$ e $A_k \subseteq [p_k, kp_k]$, si ha $A_i + A_k \subseteq [p_i + p_k, ip_i + kp_k]$. Ora, se $i < j$ e $k < j$, allora $ip_i + kp_k \le 2(j-1)p_{j-1}$ che è strettamente minore di p_j per definizione di p_j: ne consegue che che $(A_i + A_k) \cap A_j = \emptyset$. Dunque deve essere $i = j$ o $k = j$. Ma se $i = j$, allora $x_2 - x_1 = ap_j$ e $x_3 - x_1 = bp_j$ con $1 \le a < b \le j$, e se $x_3 - x_2 = cp_k$ con $1 \le c \le k$, allora $(b-a)p_j = cp_k$, e essendo $j \ge k$, si ha $p_j \ge p_k > k \ge c$, da cui che $p_j | p_k$ e quindi $k = j$. Analogamente si dimostra che se $k = j$ allora $i = j$. Ne consegue che $x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_3 - x_2 \in A_j$. Ripetendo questo ragionamento per x_2, x_3, x_4, otteniamo che $x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3$ stanno tutti in un $A_{j'}$, e dato che $x_3 - x_2 \in A_j$ e gli A_u sono disgiunti a due a due, si ha che $x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3 \in A_j$. Si procede analogamente sulle successive triple consecutive, e si ottiene in particolare che $x_{u+1} - x_u \in A_j$ per ogni u, da cui che $x_{u+1} - x_u \le jp_j$ per ogni u. Ne consegue che X è sindetico.

□

Esercizio 3.7. Trovare un insieme infinito che non è un Δ_f-set.

Dimostrazione. Consideriamo $A = \{r^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove r è un numero dispari ≥ 3. Mostriamo che non esistono insiemi X di 3 elementi tali che $\Delta(X) \subseteq A$. Infatti, supponiamo per assurdo che esista un tale X, e siano $x_1 < x_2 < x_3$ i suoi elementi. Allora si deve avere

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r^a \\ x_3 - x_1 &= r^b \\ x_3 - x_2 &= r^c \end{aligned}$$

per certi $a, b, c \in \mathbb{N}$ con $a < b$ e $c < b$. Sottraendo la prima alla seconda, si ottiene che $x_3 - x_2 = r^b - r^a = r^a \left(r^{b-a} - 1\right)$, da cui che

$$r^a \left(r^{b-a} - 1\right) = r^c.$$

Ma questo è assurdo: infatti, il numero a destra è dispari, mentre il numero a sinistra è pari, e entrambi sono interi positivi. □

Esercizio 3.8. Dimostrare che le famiglie dei Δ-sets e dei Δ_f-sets sono regolari per partizioni.

Dimostrazione. L'idea è applicare Ramsey infinito nel caso dei Δ-sets, e Ramsey finito nel caso dei Δ_f-sets.
Sia X un Δ-set. Allora esiste H infinito tale che $\Delta(H) \subseteq X$. Siano $C_1 \sqcup C_2 = X$. Definiamo una 2-colorazione di $[H]^2$ in questo modo: per $x < y \in H$, $\{x, y\} \in R_1$ se e solo se $y - x \in C_1$, mentre $\{x, y\} \in R_2$ se e solo se $y - x \in C_2$. Per il Teorema di Ramsey, esiste un sottoinsieme infinito H' di H tale che $[H']^2$ sia monocromatico. Per definizione di R_i, si ha che $[H']^2 \subseteq R_i$ implica $\Delta(H') \subseteq C_i$. Ne consegue la tesi.
Sia X un Δ_f-set. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste H con $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq X$. Siano $C_1 \sqcup C_2 = X$. Per Ramsey finito, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, se $|H| = n$, allora comunque scelga una 2-colorazione di $[H]^2$, esiste $H' \subseteq H$ tale che $|H'| = m$ e $[H']^2$ è monocromatico. Fissato m, dimostriamo che esiste H tale che $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq C_1$ oppure $\Delta(H) \subseteq C_2$. Scegliamo H' tale che $|H'| = n$ e $\Delta(H') \subseteq X$ (esiste perchè X è Δ_f-set): coloriamo $[H']^2$ come prima: per $x < y \in H'$, $\{x, y\} \in R_1$ se e solo se $y - x \in C_1$, mentre $\{x, y\} \in R_2$ se e solo se $y - x \in C_2$. Allora, per Ramsey finito con $r = k = 2$, esiste $H \subseteq H'$ tale che $|H| = m$ e $[H]^2$ sia monocromatico, ossia $\Delta(H) \subseteq C_1$ oppure $\Delta(H) \subseteq C_2$. Se si verifica il primo caso, coloriamo m con il colore D_1, mentre se si verifica il secondo caso, coloriamo m con il colore D_2. Allora D_1, D_2 è una partizione di $\mathbb{N}$, e quindi per Ramsey infinito uno dei due insiemi, wlog D_1, è infinito. Allora C_1 è un Δ_f-set: infatti, essendo D_1 infinito, è superiormente illimitato, e quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $s \geq m$ tale che esista S con $|S| = s$ e $\Delta(S) \subseteq C_1$, da cui che un qualunque sottoinsieme $H \subseteq S$ tale che $|H| = m$ è tale che $\Delta(H) \subseteq C_1$. Dalla generalità di m si ha la tesi. □

Esercizio 3.9. Trovare una partizione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ dove né C_1 né C_2 contengono progressioni aritmetiche *infinite*. Ne consegue che la famiglia degli insiemi che contengono progressioni aritmetiche infinite *non* è regolare per partizioni.

Dimostrazione. Osserviamo che un insieme che contiene una progressione aritmetica infinita è sindetico. Infatti, supponiamo che $X \subseteq \mathbb{N}$ contenga la progressione $S = \{d + kn\}_{n \in \omega}$: allora si ha

$$\mathbb{N} = \bigcup_{t < \max\{d, k+1\}} (S - t)$$

in quanto ogni elemento di $\mathbb{N}$ è o minore di d, e quindi della forma $d - t$ per un certo $t < d$, o è compreso tra $d + kn$ e $d + k(n+1) - 1$ per un certo n, e quindi è della forma $d + k(n+1) - t$ per un certo $t \in \{1, ..., k\}$. A questo punto, è sufficiente trovare una partizione di $\mathbb{N}$ in due insiemi non sindetici. Questo è facile: ad esempio, la successione definita per ricorrenza

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + n \end{aligned}$$

definisce la partizione

$$\begin{aligned} C_1 &= \bigcup_{n \in \omega} [x_{2n+1}, x_{2n+2}] \\ C_2 &= \bigcup_{n \in \omega} [x_{2n+2}, x_{2n+3}] \end{aligned}$$

tale che i pezzi sono ovviamente entrambi non sindetici. □

Esercizio 3.10. Il teorema di compattezza combinatoria dice che *se una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi finiti è r-regolare su un insieme X, allora è r-regolare anche su un certo sottoinsieme finito Y di X*. Usando tale teorema:

1. dimostrare che dal Teorema delle differenze infinito segue il Teorema delle differenze finito;
2. dimostrare che dal Teorema di Ramsey infinito segue il Teorema di Ramsey finito.

Dimostrazione.

1. Fissiamo m e r, e dimostriamo che esiste n tale che per ogni r-colorazione di $\{1, ..., n\}$ esiste H tale che $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq \{1, ..., n\}$ è monocromatico. Sia Γ l'insieme delle r-colorazioni di $\mathbb{N}$. Il Teorema delle differenze infinito implica immediatamente che, per ogni r-colorazione γ di $\mathbb{N}$, esiste H_m^γ tale che $|H_m^\gamma| = m$ e $\Delta(H_m^\gamma)$ sia monocromatico. Questo significa che l'insieme $\mathcal{F}_m = \{\Delta(H_m^\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su $\mathbb{N}$. Allora, per compattezza, $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su un certo sottoinsieme finito Y di $\mathbb{N}$. Sia n il massimo di Y. Allora $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $\{1, ..., n\}$: infatti, fissata una r-colorazione di $\{1, ..., n\}$, essa induce una r-colorazione di Y, e quindi rispetto a tale colorazione indotta esiste un elemento di $\mathcal{F}_m$ che è monocromatico, da cui che tale elemento è monocromatico anche rispetto alla colorazione iniziale. Ma dire che $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $\{1, ..., n\}$ significa dire che, per ogni r-colorazione di $\{1, ..., n\}$, esiste un elemento $\Delta(H_m^\gamma) \in \mathcal{F}_m$ contenuto in $\{1, ..., n\}$ e monocromatico: allora H_m^γ ha cardinalità m e il suo insieme di differenze è contenuto in $\{1, ..., n\}$ ed è monocromatico. Ne consegue la tesi.

2. Fissiamo m, r, k, e dimostriamo che esiste n tale che per ogni r-colorazione di $[\{1, ..., n\}]^k$ esiste H tale che $|H| = m$ e $[H]^k$ è monocromatico. Sia Γ l'insieme delle r-colorazioni di $[\mathbb{N}]^k$. Il Teorema di Ramsey infinito implica immediatamente che, per ogni r-colorazione γ di $[\mathbb{N}]^k$, esiste H_m^γ tale che $|H_m^\gamma| = m$ e $[H_m^\gamma]^k$ sia monocromatico. Questo significa che l'insieme $\mathcal{F}_m = \left\{[H_m^\gamma]^k : \gamma \in \Gamma\right\}$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su $[\mathbb{N}]^k$. Allora, per compattezza, $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su un certo sottoinsieme finito Y di $[\mathbb{N}]^k$. Sia n il massimo dell'insieme contenente gli elementi delle k-uple contenute in Y. Allora $Y \subseteq [\{1, ..., n\}]^k$. Ne consegue che $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $[\{1, ..., n\}]^k$: infatti, fissata una r-colorazione di $[\{1, ..., n\}]^k$, essa induce una r-colorazione di Y, e quindi rispetto a tale colorazione indotta esiste un elemento di $\mathcal{F}_m$ che è monocromatico, da cui che tale elemento è monocromatico anche rispetto alla colorazione iniziale. Ma dire che $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $[\{1, ..., n\}]^k$ significa dire che, per ogni r-colorazione di $[\{1, ..., n\}]^k$ esiste un elemento $[H_m^\gamma]^k$ contenuto in $[\{1, ..., n\}]^k$ e monocromatico: allora $H_m^\gamma \subseteq \{1, ..., n\}$, ha cardinalità m e $[H_m^\gamma]^k$ è monocromatico. Ne consegue la tesi.

$\square$