Esercizi vari di analisi non standard

Federico Scavia

March 30, 2015

Esercizio 1. *Sia U un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Dimostrare che ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$ ha una struttura naturale di campo ordinato che estende $\mathbb{R}$.*

Proof. Le operazioni sono definite da $[(x_n)_n]+[(y_n)_n] = [(x_n+y_n)_n]$ e $[(x_n)_n]\cdot[(y_n)_n] = [(x_n\cdot y_n)_n]$. Che ${}^*R$ sia un campo è chiaro dalla corrispondenza ultrafiltri-ideali, ma facciamo comunque la verifica diretta (l'unica parte un minimo non ovvia, e anche l'unica in cui si usi la proprietà dell'ultrafiltro, è l'esistenza dell'inverso). Partiamo dalla somma:

Buona definizione: Se $\{n : x_n = x'_n\} \in U$ e $\{n : y_n = y'_n\} \in U$ allora anche $\{n : x_n + y_n = x'_n + y'n\} \supseteq \{n : x_n = x'_n\} \cap \{n : y_n = y'_n\}$ sta in U (contiene un'intersezione di elementi di U che dunque sta in U).

Associativa e commutativa: chiare perché $\{n : (x_n + y_n) + z_n = x_n + (y_n + z_n)\} = \mathbb{N} \in U$ e $\{n : x_n + y_n = y_n + x_n\} = \mathbb{N} \in U$.

Neutro: poniamo $0 = [(0)_n]$. Per ogni $(x_n)_n$ vale $[(x_n)_n] + [(0)_n] = [(x_n + 0)_n] = [(x_n)_n]$ (per commutatività anche nell'altro verso).

Opposto: l'opposto di $[(x_n)_n]$ è dato da $[(-x_n)_n]$, infatti la somma è proprio $[(0)_n]$.

Analogamente per il prodotto:

Buona definizione: Se $\{n : x_n = x'_n\} \in U$ e $\{n : y_n = y'_n\} \in U$ allora anche $\{n : x_n y_n = x'_n y'n\} \supseteq \{n : x_n = x'_n\} \cap \{n : y_n = y'_n\}$ sta in U (contiene un'intersezione di elementi di U che dunque sta in U).

Associativa e commutativa: chiare perché $\{n : (x_n y_n) z_n = x_n(y_n z_n)\} = \mathbb{N} \in U$ e $\{n : x_n y_n = y_n x_n\} = \mathbb{N} \in U$.

Neutro: poniamo $1 = [(1)_n]$. Per ogni $(x_n)_n$ vale $[(x_n)_n] \cdot [(1)_n] = [(x_n \cdot 1)_n] = [(x_n)_n]$ (per commutatività anche nell'altro verso).

Inverso: sia $[(x_n)_n] \neq 0$. Questo vuol dire che $\{n : x_n = 0\} \notin U$, ovvero per la proprietà di ultrafiltro $S = \{n : x_n \neq 0\} \in U$. Definiamo allora $(y_n)_n$ con $y_n = {x_n}^{-1}$ se $n \in S$ e con $y_n = 1$ se $n \notin S$. Allora $[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n y_n)] = [(1)_n]$, infatti $\{x_n y_n = 1\} = S \in U$.

Diciamo che $[(x_n)_n] \leq [(y_n)_n]$ se $\{x_n \leq y_n\} \in U$. Definiamo analogamente $\geq, <, >$.

Buona definizione: se $\{n : x_n = x'_n\} \in U$, $\{n : y_n = y'_n\} \in U$ e $\{n : x_n \leq y_n\} \in U$, allora $\{n : x'_n < y'_n\} \in U$ perché contiene l'intersezione dei tre.

Riflessiva: $\{n : x_n \leq x_n\} = \mathbb{N} \in U$.

Antisimmetrica: se $\{n : x_n \leq y_n\} \in U$ e $\{n : y_n \leq x_n\} \in U$ allora $\{n : x_n = y_n\} = \{n : x_n \leq y_n\} \cap \{n : y_n \leq x_n\} \in U$.

Transitiva: se $\{n : x_n \leq y_n\} \in U$ e $\{n : y_n \leq z_n\} \in U$ allora $\{n : x_n \leq z_n\} \in U$ perché contiene l'intersezione dei due.

Immersione di campi ordinati $\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Consideriamo $x \mapsto [(x)_n]$.

Omomorfismo: è esattamente il fatto che $[(x)_n] + [(y)_n] = [(x+y)_n]$, $[(x)_n][(y)_n] = [(xy)_n]$, che sono proprio le definizioni delle operazioni su ${}^*R$.

Iniettivo: ovvio perché omomorfismo con dominio un campo (il nucleo è un ideale).

Crescente: se $x \leq y$ allora $\{n : x \leq y\} = \mathbb{N} \in U$.

□

Esercizio 2. *Per un campo ordinato F sono equivalenti:*

- *F è archimedeo ($\forall x \in F^* \ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $xn > 1$);*
- *$\mathbb{N}$ è illimitato in F;*
- *$\mathbb{Q}$ è denso in F;*
- *Non esistono infinitesimi non nulli in F.*

Proof. **1) ⇒ 2):** Sia $x \in F$. Se $x \leq 0$, allora $1 > x$. Se $x > 0$, allora la proprietà archimedea per $\frac{1}{x}$ dà $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n}{x} > 1$, ovvero $n > x$.

2) ⇒ 3): Siano $x < y \in F$, ci basta vedere la tesi nel caso $x \geq 0$. Per l'illimitatezza di $\mathbb{N}$ sappiamo che $\exists q \in \mathbb{N}$ con $q > \frac{1}{y-x}$. Sia ora $p \in \mathbb{N}$ il minimo naturale tale che $p > qx$ (esiste perché $\mathbb{N}$ è illimitato). Chiaramente $p > 0$. Inoltre se per assurdo fosse $p > qy$, allora $p-1 > qy-1 > qx$, dunque p non sarebbe minimo. Dunque $qx < p < qy$, ovvero $x < \frac{p}{q} < y$.

3) ⇒ 4): Sia $x \neq 0$, e supponiamo senza perdita di generalità $x > 0$. Allora esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $0 < \frac{p}{q} < x$. In particolare $\frac{1}{q} < \frac{p}{q} < x$, dunque x non è infinitesimo.

4) ⇒ 1): Sia $x > 0$ che non rispetta la proprietà archimedea, allora x è infinitesimo $0 < x < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

□

Esercizio 3. ${}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/U$*, con U ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. ${}^*\mathbb{Q}_{fin} := \{\xi \in {}^*\mathbb{Q} : \xi$ limitato$\}$ è un anello ordinato. Sia $I \subseteq {}^*\mathbb{Q}_{fin}$ l'ideale massimale degli infinitesimi. Allora ${}^*\mathbb{Q}_{fin} \cong \mathbb{R}$ come campo ordinato.*

Proof. Sia $A = {}^*\mathbb{Q}_{\text{fin}}$. Partiamo dimostrando che gli infinitesimi di A formano un ideale massimale.

Ideale: 0 è infinitesimo, somma di infinitesimi è infinitesima e prodotto di infinitesimo per limitato è infinitesimo.

Massimale: se x è limitato ma non infinitesimo, allora $x^{-1} \in {}^*\mathbb{Q}$ non è infinito (perché x non è infinitesimo) e dunque sta in A (quindi $x \in A^*$).

Consideriamo l'omomorfismo di anelli $\phi : {}^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ che manda $[(x_n)_n]$ in $\inf\{M \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} x_n \leq M\} \in U\}$.

Esistenza: Tale estremo inferiore esiste: sia $x = [(x_n)_n]$ con $(x_n)_n$ limitata (per definizione esiste un tale rappresentante). Allora preso λ l'estremo superiore di tale successione, certamente se $[(x_n)_n] = [(x'_n)_n]$ l'insieme

$$\{n \in \mathbb{N} : x'_n \leq \lambda\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq \lambda\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\} \in U.$$

Inoltre tale estremo inferiore è finito perché non si può scendere sotto l'estremo inferiore della successione (che esiste reale).

Indipendenza dal rappresentante: Scelte due successioni rappresentanti, $M \in \mathbb{R}$ maggiora quasi ovunque gli elementi di una (ovvero $\{n :\in \mathbb{N} x_n \leq M\} \in U$) se e solo se maggiora quasi ovunque gli elementi dell'altra (siccome le due successioni sono uguali quasi ovunque). Più precisamente $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $\{n \in \mathbb{N} x'_n \leq M\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} x_n \leq M\} \cap \{n \in \mathbb{N} x'_n = x_n\}$ e analogamente scambiando x'_n e x_n, dunque o stanno entrambi in U o nessuno dei due ci sta.

Omomorfismo di anelli: Data l'indipendenza dal rappresentante è tutto ovvio. Date $(x_n), (y_n)$, se $M > x_n$ quasi ovunque e $N > y_n$ quasi ovunque e M, N sono le minime tali costanti, allora $M + N > x_n + y_n$ quasi ovunque, da cui $\phi([(x_n)]) + \phi([(y_n)]) \geq \phi([(x_n + y_n)])$. D'altra parte, se $\epsilon > 0$, allora $M - \epsilon < x_n$ e $N - \epsilon < y_n$ quasi ovunque, dunque $M + N - 2\epsilon < x_n + y_n$ quasi ovunque. Analogamente si lavora sul prodotto (partendo dalle successioni quasi ovunque positive e poi passando all'opposto). Infine, è chiaro che $1 \mapsto 1$.

Suriettività: Consideriamo, per $r \in \mathbb{R}$, una successione $(x_n)_n$ di razionali che converge crescendo a r, allora è chiaro che $[(x_n)] \mapsto r$.

Nucleo: Dire $[(x_n)_n] \mapsto 0$ vuol dire che $\forall \epsilon > 0$ quasi ovunque $\epsilon > x_n > -\epsilon$ (la prima disuguaglianza perché ogni positivo è maggiorante quasi ovunque, la seconda perché nessun negativo lo è e si applica la proprietà dell'ultrafiltro), ovvero (preso $\epsilon = \frac{1}{m}$ con m intero positivo) che $[(x_n)_n]$ è infinitesimo.

Dunque l'omomorfismo definito passa al quoziente e induce l'isomorfismo cercato. □

Esercizio 4. *In* ${}^*\mathbb{R}$ *ogni insieme numerabile è limitato*

Proof. Sia $(x^n)_n$ una successione di elementi di ${}^*\mathbb{R}$, dove $x^n = [(x^n_k)_k]$. Definiamo una successione di elementi di $\mathbb{R}$ (a_k) tramite $a_k = \max(\{x^n_k : n = 1, \ldots, k\})$. Posto $a = [(a_k)_k]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a \geq x^n$, perché $\{k \in \mathbb{N} x^n_k \leq a_k\}$ ha complementare finito, dunque sta nel filtro di Fréchet e dunque nell'ultrafiltro. □

Esercizio 5. *Sia F un campo ordinato contenente $\mathbb{R}$. Se $x \in F$ è limitato, allora esiste un unico $r \in \mathbb{R}$ tale che $x - r$ è infinitesimo (si scrive $x \sim r$). Tale r è detto la parte standard di x e si indica $st(x)$. Verificare che st è additivo, moltiplicativo e che $st(\frac{1}{x}) = \frac{1}{st(x)}$.*

Proof. Dato $x = [(x_n)_n]$, sia $r := \inf M \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq M\} \in U$. Come in un esercizio precedente (là in ${}^*\mathbb{Q}$, qui in ${}^*\mathbb{R}$), si verifica che se x è limitato allora tale r esiste finito. Inoltre per costruzione $\forall \epsilon > 0$ U-quasi ovunque $x_n \leq r + \epsilon$ e U-quasi ovunque $x_n \geq r - \epsilon$, ovvero la differenza è infinitesima.

La verifica dell'additività e moltiplicatività della parte standard sui limitati è identica a quella fatta qualche esercizio fa. La proprietà per l'inverso segue dall'osservazione che $\mathrm{st}(x) = \sup M \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq M\} \in U$. □

Esercizio 6. *Parte intera non standard:* $\forall x \in {}^*\mathbb{R}\ \exists! \nu \in {}^*\mathbb{Z}$ *tale che* $\nu \leq x < \nu + 1$.

Proof. Se $x \in {}^*\mathbb{R}$ è rappresentato da $[(x_n)_n]$, allora il candidato ν è $\nu = [(([x_n])_n)]$ dove con le parentesi quadre intendiamo la parte intera. Chiaramente $\nu \leq x \leq \nu + 1$. In effetti $x < \nu + 1$ perché $\{n :\in \mathbb{N} x_n = [x_n] + 1\} = \emptyset \notin U$. $\square$

Esercizio 7. *Formulare in termini nonstandard proprietà di funzioni reali in termini della loro estensione non standard.*

Proof. Sia $f : A \to B$ (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$). Ricordiamo che la sua estensione nonstandard è ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$ data da $[(x_n)_n] \mapsto [(f(x_n))_n)]$. Notiamo che se $x \in \mathbb{R}$ vale ${}^*f(x) = f(x)$ se pensiamo $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ tramite l'immersione naturale.

Continuità: sia $x_0 \in X$. Allora f è continua in x_0 se e solo se

$$\forall \xi \sim x_0 {}^*f(\xi) \sim f(x_0).$$

Infatti se f è continua in x_0, questo vuol dire che $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Sia $\xi = [(\xi_n)_n]$ tale che $\xi - x_0$ è infinitesimo. Dato $\epsilon > 0$, prendiamo il δ della continuità in x_0, allora $\{n \in \mathbb{N} | f(\xi_n) - f(x_0)| < \epsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} | \xi_n - x_0| < \delta\} \in U$. Siccome ϵ è arbitrario, troviamo ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.

Viceversa, assumiamo che valga la condizione su ${}^*f$ e supponiamo per assurdo che f non sia continua in x_0. Esiste dunque $\epsilon > 0$ tale che per ogni n esiste $\xi_n \in \mathbb{R}$ tale che $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ma $|f(\xi_n) - f(x_0)| > \epsilon$. Posto $\xi = [(\xi_n)_n]$, si ha $\xi \sim x_0$ (dopo i primi n interi, le entrate del rappresentante scelto di ξ distano meno di $\frac{1}{n}$ da x_0) ma ${}^*f(\xi) \not\sim f(x_0)$.

Uniforme continuità: f è uniformemente continua se e solo se

$$\xi \sim \eta \Rightarrow {}^*f(\xi) \sim {}^*f(\eta).$$

Infatti se vale la continuità uniforme allora presi $[(\xi_n)_n] \sim [(\eta_n)_n]$ allora per ogni $\delta > 0$ $\{n \in \mathbb{N} | \xi_n - \eta_n| < \delta\} \in U$ e quindi comunque scelto $\epsilon > 0$ anche $\{n \in \mathbb{N} | f(\xi_n) - f(\eta_n)| < \epsilon\} \in U$ (contiene uno degli insiemi precedenti, per un qualche δ).

Viceversa, se vale la condizione su ${}^*f$ e per assurdo non vale la continuità uniforme, si avrebbero $\epsilon > 0$ e $(\xi_n)_n, (\eta_n)_n$ successioni di reali tali che per ogni naturale $n > 0$ $|f(\xi_n) - f(\eta_n)| > \epsilon$ e $|\xi_n - \eta_n| < \frac{1}{n}$. Ancora una volta, questo è assurdo considerando gli iperreali associati ξ, η, per cui vale $\xi \sim \eta$ ma ${}^*f(\xi) \not\sim {}^*f(\eta)$.

Derivabilità: La caratterizzazione della derivabilità è la seguente:

$$f'(x_0) = L \iff \forall \epsilon \sim 0\ \frac{{}^*f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \sim L$$

L'argomento è il solito: una direzione si fa sfruttando che un infinitesimo è dato da una successione di reali che quasi ovunque verificano la condizione di derivabilità, l'altra per assurdo con $\delta = \frac{1}{n}$. In alternativa, il fatto segue immediatamente dalla caratterizzazione del limite di una funzione visto in classe.

$\square$

Esercizio 8. $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ *interno non vuoto ammette minimo.* ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *non ha minimo (e quindi è esterno).*

Proof. Sia $A = [(A_n)_n]$ con $A_n \subseteq \mathbb{N}$. In altre parole, $x = [(x_n)_n] \in A \iff \{n \in \mathbb{N} x_n \in A_n\} \in U$. Siccome A non è vuoto, $\{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\} \in U$. Fissiamo allora $a_n = 0$ se $A_n = \emptyset$ e $a_n = \min A_n$ se $A_n \neq \emptyset$. Allora $a = [(a_n)_n] \in {}^*A$ perché $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in A_n\} = \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\} \in U$. Inoltre se $b = [(b_n)_n] \in {}^*\mathbb{A}$ allora $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n \in A_n\}$ e dunque sta in U.

Infine, se $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ è infinito, allora anche $\nu - 1 \in {}^*\mathbb{N}$ ($\nu = [(\nu_n)_n] \Rightarrow \nu - 1 = [(\nu_n - 1)_n]$ e questa successione è equivalente ad una di tutti naturali perché certamente $\{n \in \mathbb{N} : \nu_n = 0\} \notin U$ (altrimenti $\nu = 0$). □

Esercizio 9. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora A è illimitato se e solo se ${}^*A$ contiene un naturale infinito.*

Sia $B \subseteq {}^*\mathbb{N}$ interno e illimitato (ovvero che contiene elementi di $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ arbitrariamente grandi). Allora B contiene ipernaturali infiniti.

In particolare $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è un insieme esterno.

Proof. Se $\nu \in {}^*A$ è infinito, $\nu = [(\nu_n)_n]$, allora per ogni naturale k $\{n \in \mathbb{N} : \nu_n > k\} \in U$ e in particolare è non vuoto. Dunque A è illimitato. Viceversa, se A è illimitato trovo una successione di A $(\nu_n)_n \to \infty$ e questa rappresenta un elemento di ${}^*A$ illimitato.

Ora, sia $B = [(B_n)_n]$ interno illimitato. Siccome B è non vuoto i B_n sono quasi tutti non vuoti, dunque se per i B_n vuoti pongo $B_n = \{0\}$ vale ancora $B = [(B_n)_n]$. Per ogni k naturale, esiste una successione $(x_n^k)_n$ con $x_n^k \in B_n$ e tale che $\{n \in \mathbb{N} : x_n^k > k\} \in U$: infatti so che esiste $x^k \in {}^*A, x^k > k$ e mi basta prendere un suo rappresentante qualsiasi e modificarlo in un numero trascurabile di B_n per avere tutte le coordinate in B_n. Ora definisco (quasi ovunque) una successione $(y_n)_n$ come $y_n = \max\{x_n^k : k = 1, \ldots, n\}$. Chiaramente $y_n \in B_n$ perché ho potuto scegliere gli x_n^k tutti in B_n. Inoltre dato M $\{n \in \mathbb{N} : y_n > M\}$ si ottiene da un insieme di U togliendo al più un numero finito di elementi, quindi sta ancora in U. In altre parole $y = [(y_n)_n]$ è un ipernaturale infinito di B.

Infine, $\mathbb{N}$ è esterno perché non contiene ipernaturali illimitato ma contiene naturali arbitrariamente grandi). □

Esercizio 10. *Dimostrare che sia ${}^*\mathbb{R}$ sia gli infinitesimi di ${}^*\mathbb{R}$ hanno la cardinalità del continuo.*

Proof. $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0{}^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$. Siccome ${}^*\mathbb{R}$ è un quoziente di tale insieme, ci basta dimostrare che gli infinitesimi hanno almeno cardinalità c.

Consideriamo su $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza $x \sim y \iff xy^{-1} \in \mathbb{Q}$. Le classi di equivalenza sono tutte numerabili, quindi ci sono c classi di equivalenza. Sia $\phi : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ data da $\phi(x) = [(\frac{x}{n})_n]$. Chiaramente $\phi(x)$ è sempre un infinitesimo. Lo 0 va in 0, mentre se x, y diversi da 0 hanno la stessa immagine, in particolare esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$, dunque in particolare $x \sim y$ rispetto alla precedente relazione. Otteniamo quindi una mappa iniettiva dalle classi equivalenza della relazione $\sim$ agli infinitesimi, da cui il risultato voluto. □