Esercizio 14 (Compattezza combinatoria)**.** Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi finiti $\subseteq X$. Dimostrare che sono equivalenti:

i) Se $\mathcal{F}$ è r-regolare su X, allora $\exists \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finito tale che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X.

ii) Se $\mathcal{F}$ è r-regolare su X, allora $\exists Y \subseteq X$ finito tale che $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y.

Soluzione. $\Downarrow$) Considero $\mathcal{F}_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ dato dall'ipotesi e il sottoinsieme finito $Y = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \subseteq X$. Voglio dunque dimostrare che $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y.
Considero una colorazione $Y = C_1 \cup \dots \cup C_r$ e la colorazione $X = C_1 \cup \dots \cup C_{r-1} \cup (C_r \cup Y^C)$; $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X e quindi mi troverò in uno dei seguenti casi:

- $\exists i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ tale che $\exists A_j \subseteq C_i$;
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ si ha $A_j \not\subseteq C_i$ per ogni $j = 1, 2, \dots, n$. In questo caso dovrà esistere A_j tale che $A_j \subseteq (C_r \cup Y^C)$. Poiché per definizione di Y si ha $Y^C \cap A_j = \emptyset$ per ogni j, necessariamente $A_j \subseteq C_r$.

Ne segue che $\mathcal{F}_0$, e dunque $\mathcal{F}$, sono r-regolari su Y.

$\Uparrow$) Sia $Y \subseteq X$ finito dato dall'ipotesi e considero $\mathcal{F}_0 = \{ A \in \mathcal{F} \mid A \subseteq Y \} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, di cardinalità finita. Dimostro che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X. Sia $X = C_1 \cup \dots \cup C_r$ una colorazione e sia $Y = C_1' \cup \dots \cup C_r'$ la colorazione indotta su Y da $C_i' = C_i \cap Y$. $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y, perciò $\exists i \, \exists A \in \mathcal{F}$ tali che $A \subseteq C_i'$. Ma allora $A \subseteq C_i' \subseteq Y$, da cui $A \in \mathcal{F}_0$ e anche $A \subseteq C_i' \subseteq C_i$, cioè $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X.

Esercizio 15. Diciamo che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è wPR (debolmente regolare per partizioni) su X se

$$\forall\, X = C_1 \cup \dots \cup C_r \quad \exists F \in \mathcal{F} \, \exists i \; F \subseteq C_i.$$

Diciamo invece che $\mathcal{F}$ è PR (regolare per partizioni) su X se

$$\forall\, C_1 \cup \dots \cup C_r \in \mathcal{F} \quad \exists F \in \mathcal{F} \, \exists i \; F \subseteq C_i.$$

Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X chiusa per soprainsiemi. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è wPR su X se e solo se contiene un ultrafiltro su X; analogamente, $\mathcal{F}$ è PR su X se e solo se è unione di ultrafiltri su X.

Soluzione. Se $\mathcal{F}$ contiene un ultrafiltro $\mathcal{U}$, allora $X \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ e dalla definizione di ultrafiltro segue che $\mathcal{F}$ è wPR. Se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri, allora ogni $C_1 \cup \dots \cup C_r \in \mathcal{F}$ appartiene ad un ultrafiltro contenuto in $\mathcal{F}$ e dalle proprietà dell'ultrafiltro segue che $\mathcal{F}$ è PR.
Viceversa, sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X debolmente regolare per partizioni. Posso supporre $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e che $\mathcal{F}$ non contenga singoletti (altrimenti conterrebbe banalmente l'ultrafiltro generato). Osservo che per ogni $A \subseteq X$ $\mathcal{F}$ contiene A o A^C (perché $X =$

$A \cup A^C$); inoltre posso supporre che $\mathcal{F}$ contenga solo uno dei due, infatti almeno una tra le famiglie $\mathcal{F} \setminus \{A\}$ e $\mathcal{F} \setminus \{A^C\}$ deve essere wPR. Se così non fosse, esisterebbe una colorazione

$$X = D_1 \cup \cdots \cup D_n$$

tale che non esista $F \in \mathcal{F} \setminus \{A\}$, $F \subseteq D_i$ per qualche i, cioè (poiché $\mathcal{F}$ è wPR) $\exists i$ $A \subseteq i$. Ciò implica che $\mathcal{F}$ non contiene nessun sottinsieme di A. Analogamente si trova che non può contenere sottoinsiemi di A^C. Ma allora se $\emptyset \neq B \subsetneqq A$ e $\emptyset \neq C \subsetneqq A^C$, $X = B \cup (A \setminus B) \cup C \cup (A^C \setminus C)$ (esistono poiché abbiamo supposto che gli elementi di $\mathcal{F}$ avessero più di un elemento) ed $\mathcal{F}$ non può essere regolare.
Dimostro che, in queste ipotesi, $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro; basta dimostrare che è stabile per intersezioni finite. Siano dunque $A, B \in \mathcal{F}$ (dunque $A^C, B^C \notin \mathcal{F}$, né nessuno dei loro sottoinsiemi vi appartiene). Posso scrivere

$$X = A^C \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A^C).$$

Per la debole regolarità di $\mathcal{F}$, $\exists F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subseteq A^C$ oppure $F \subseteq A \setminus B$ oppure $F \subseteq B \setminus A^C$. Poiché $A \setminus B \subseteq B^C$, l'unica possibilità è l'ultima, che implica $F \subseteq B \setminus A^C \subseteq A \cap B$, cioè $A \cap B \in \mathcal{F}$.
Sia invece ora $\mathcal{F}$ regolare per partizioni su X (fortemente) e sia $F \in \mathcal{F}$. Come prima, suppongo $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
Considero la famiglia

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \setminus \left\{ A \in \mathcal{F} \;\middle|\; A \subseteq F^C \right\}.$$

Si ha che $\mathcal{G}$ è chiusa per soprainsiemi ed è wPR su X, dunque contiene un ultrafiltro che contiene F. Infatti una colorazione

$$X = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$$

induce una colorazione

$$F = (C_1 \cap F) \cup \cdots \cup (C_r \cap F)$$

e per la regolarità di $\mathcal{F}$ esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $A \subseteq C_i \cap F$ per qualche i. In particolare $A \subseteq C_i$ e $A \in \mathcal{G}$. Per quanto dimostrato precedentemente dunque si conclude.

Esercizio 16. Dimostrare che ogni sottoinsieme numerabile di ${}^{\star}\mathbb{N}$ ammette un maggiorante.

Soluzione. Sia $A = \{[\phi_n]\} \subseteq {}^{\star}\mathbb{N}$, dove $\phi_n = \phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\phi_n(k) = h_{n,k}$. Costruisco esplicitamente un maggiorante $[\xi] \in {}^{\star}\mathbb{N}$ per l'insieme A: definisco $\xi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\forall m \in \mathbb{N}$ si abbia

$$\xi(m) > \max_{k \leq m}\{h_{k,m}\}.$$

Allora, per ogni n, si ha

$$\{\, m \in \mathbb{N} \mid \xi(m) > \phi_n(m) \,\} \supseteq \{m \in \mathbb{N} | m \geq n\} \in \mathcal{U}$$

dove $\mathcal{U}$ è l'ultrafiltro non principale usato nella definizione di ${}^\star\mathbb{R}$. Perciò $[\xi] > [\phi_n]$ per ogni n naturale e dunque $[\xi]$ è un maggiorante di A.

Esercizio 17. Dare una costruzione di $\mathbb{R}$ partendo da $\mathbb{Q}$ utilizzando le ultrapotenze.

Soluzione. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ e sia ${}^\star\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Procedendo in modo analogo con quanto fatto per ${}^\star\mathbb{R}$ si ottiene che l'oggetto considerato è un campo (segue da un esercizio generale e dal fatto che anche $\mathbb{Q}$ è un campo) che si può dotare di un ordine totale definito da

$$[\eta] \leq [\xi] \iff \{\, n \mid \eta(n) \leq \xi(n) \,\} \in \mathcal{U}.$$

Considero ora

$${}^\star\mathbb{Q}_{fin} = \{\, \xi \in {}^\star\mathbb{Q} \mid \xi \text{ è limitato} \,\}.$$

Si ha allora che ${}^\star\mathbb{Q}_{fin}$ è un anello. Infatti somme, prodotti e inversi (additivi) di elementi limitati sono limitati. In particolare è un anello locale e l'insieme I formato dagli infinitesimi è il suo ideale massimale poiché gli elementi in ${}^\star\mathbb{Q}_{fin} \setminus I$ sono tutti e soli gli elementi invertibili dell'anello ${}^\star\mathbb{Q}_{fin}$ (il loro inverso è un iperrazionale limitato non infinitesimo).
Considero ora ${}^\star\mathbb{Q}_{fin}/I$: è un campo e su di esso si ha un ordine naturale indotto da

$$[\xi] \leq [\eta] \iff \xi \leq \eta \text{ dove } \xi, \eta \in {}^\star\mathbb{Q}_{fin}.$$

La relazione così definita è una relazione d'ordine ben definita.
Dimostro ora che il campo ordinato costruito è completo e dunque è isomorfo al campo dei numeri reali. Noto prima di tutto che è archimedeo (ho eliminato gli infinitesimi quozientando) e che pertanto $\mathbb{Q}$ è denso in esso. Per concludere basta dimostrare che ogni successione crescente limitata superiormente ammette estremo superiore: verifico che ciò è vero per le successioni di razionali e concludo sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$.
Sia dunque $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione crescente limitata di razionali; definisco $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ data da $q(i) = q_i$ e considero $q = [q] + I \in {}^\star\mathbb{Q}_{fin}/I$. Dimostro che q è il sup della successione $(q_i)_i$: si ha $q \geq q_i$ per ogni i per definizione; se esistesse $p < q$ tale che $q_i \leq p$ $\forall i$, per archimedeità deve esistere n tale che $q - p > 1/n$, da cui $q > q_i + 1/n$ per ogni i. Questo è assurdo, poiché $(q_i + 1/n)_i$ è una successione la cui classe nel campo considerato è strettamente maggiore di q. In particolare esiste q_j tale che $q_j > p$ per ogni $p < q$.
Infine, se $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una qualsiasi successione crescente di elementi di ${}^\star\mathbb{Q}_{fin}/I$, per densità di $\mathbb{Q}$ posso definire una successione $(q_i)_i$ tale che per ogni i si abbia $r_i < q_i < r_{i+1}$. Allora il sup della successione $(r_i)_i$ è lo stesso della successione $(q_i)_i$, q. Infatti $q \geq q_i > r_i$ per ogni i e se $s < q$ esiste $q_j > s$ e dunque $r_{j+1} > s$, cioè q è il sup.

Esercizio 18. Verificare l'equivalenza delle definizioni di limite e continuità date nel modello non standard costruito con quelle note dall'analisi reale.

Soluzione. **Limiti.** Vale che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \text{ infinito, } a_\nu \sim l.$$

Suppongo che la successione $(a_n)_n$ abbia limite l e sia $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, dato dalla classe di equivalenza modulo $\mathcal{U}$ di $(n_1, n_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Fisso $\varepsilon > 0$; per la definizione di limite (classica) si ha che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ vale $|a_n - l| < \varepsilon$. Poiché ν è infinito, si ha anche $\{\, k \mid n_k > \bar{n} \,\} \in \mathcal{U}$. Pertanto vale

$$\{\, k \mid n_k > \bar{n} \,\} \subseteq \{\, k \mid \ |a_{n_k} - l| < \varepsilon \,\} \in \mathcal{U}$$

da cui, per arbitrarietà di ε, ne segue che $a_\nu - l \sim 0$.
Viceversa, suppongo per assurdo che $a_n \not\to l$, cioè $\exists \varepsilon > 0$ per cui si ha

$$\{\, n \mid \ |a_n - l| \geq \varepsilon \,\} \in \mathcal{U}$$

in quanto cofinito. Pertanto il suo complementare non appartiene all'ultrafiltro. Considero $\nu = (1, 2, 3, 4, \dots)$; per ipotesi $a_\nu - l \sim 0$ e ciò implica

$$\{\, n \mid \ |a_n - l| < \varepsilon \,\} \in \mathcal{U}$$

da cui l'assurdo.
Limsup. Dimostro che

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \nu \text{ infinito tale che } \operatorname{st}(a_\nu) \geq l.$$

Se $\limsup a_n \geq l$, sia $(a_{n_k})_k$ una sottosuccessione tale che $a_{n_k} \to \limsup a_n = c$. Considero il numero ipernaturale infinito ν dato dalla classe di $(n_0, n_1, n_2, \dots)$. Allora $\operatorname{st}(a_\nu) = c \geq l$, infatti se $c = \infty$ a_ν è infinito e se $c \in \mathbb{R}$ per quanto dimostrato sui limiti $a_\nu \sim c$, cioè $\operatorname{st}(a_\nu) = c \geq l$.
Viceversa, suppongo che per un certo ν infinito (classe di $(n_0, n_1, \dots)$) si abbia $\operatorname{st}(a_\nu) = s \geq l$. Se $s = \infty$, allora per ogni fissato $m \in \mathbb{N}$ gli insiemi $\{\, k \mid a_{n_k} > m \,\}$ sono infiniti (stanno in $\mathcal{U}$) e dunque esiste una sottosuccessione che tende a ∞, cioè $\limsup a_n = \infty \geq l$. Se invece $c \in \mathbb{R}$, si ha $a_\nu \sim c$ e perciò $a_{n_k} \to c$, che implica $\limsup a_n \geq c \geq l$.
Dimostro ora che

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad l = \max\{\, \operatorname{st}(a_\nu) \mid \nu \text{ipernaturale infinito} \,\}.$$

Se $l = \limsup a_n$, considerando una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che tende ad l si ottiene ν infinito la cui parte standard è l, per quanto fatto in precedenza. Inoltre l è il massimo di tali parti standard, poiché, per la considerazione precedente, se esistesse μ tale che $\operatorname{st}(a_\mu) \geq s > l$, allora $\limsup a_n \geq s > l$.

Viceversa, se ν è tale che $\mathrm{st}(a_\nu) = l$, allora $\limsup a_n \geq l$. ma non può essere strettamente maggiore per la considerazione precedente.

Continuità. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$; la continuità di f in $x \in \mathbb{R}$ si esprime in termini non standard con

$$\forall \xi \sim x \quad \Rightarrow \quad {}^\star f(\xi) \sim f(x).$$

La definizione non standard implica quella classica. Sia infatti $y_n \to x$; per quanto dimostrato sui limiti si ha che $y_\nu \sim x$ per ogni ipernaturale ν infinito. Ma allora ${}^\star f(y_\nu) \sim f(x)$ e sempre per la parte precedente ciò implica (per arbitrarietà di ν) che $f(y_n) \to f(x)$. Viceversa, sia $\xi \sim x$; allora per ogni $\delta > 0$ si ha che

$$\{\, k \mid \ |\xi(k) - x| < \delta \,\} \in \mathcal{U}.$$

Fisso $\varepsilon > 0$; per la continuità di f in x, si ha che $\exists \delta > 0$ tale che se $|y - x| < \delta$ allora $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Quindi si avrà che

$$\{\, k \mid \ |\xi(k) - x| < \delta \,\} \subseteq \{\, k \mid \ |f(\xi(k)) - f(x)| < \varepsilon \,\} \in \mathcal{U}$$

da cui, per arbitrarietà di ε, ${}^\star f(\xi) \sim f(x)$.

Esercizio 19. La famiglia degli insiemi interni è chiusa per unione, intersezione e differenza insiemistica.

Soluzione. Siano A e B due insiemi interni corrispondenti alle successioni di insiemi $\langle A_n | n \in \mathbb{N}\rangle$ e $\langle B_n | n \in \mathbb{N}\rangle$. Dimostro che anche gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ sono interni facendo vedere che effettivamente corrispondono alle successioni di insiemi $\langle A_n \cup B_n | n \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle A_n \cap B_n | n \in \mathbb{N}\rangle$ e $\langle A_n \setminus B_n | n \in \mathbb{N}\rangle$.

$\cup$) Sia $\xi \in A \cap B$; posso supporre $\xi \in A$. Allora $\{\, n \mid \xi_n \in A_n \,\} \in \mathcal{U}$, cioè anche il soprainsieme $\{\, n \mid \xi_n \in A_n \cup B_n \,\} \in \mathcal{U}$, da cui $\xi \in \langle A_n \cup B_n\rangle$. Se invece $\eta \in \langle A_n \cup B_n\rangle$, si ha che $\{\, n \mid \eta_n \in A_n \cup B_n \,\} \in \mathcal{U}$. Allora

$$\{\, n \mid \eta_n \in A_n \cup B_n \,\} = \{\, n \mid \eta_n \in A_n \,\} \cup \{\, n \mid \eta_n \in B_n \,\} \in \mathcal{U}$$

e posso supporre ad esempio che $\{\, n \mid \eta_n \in A_n \,\} \in \mathcal{U}$, cioè $\eta \in A$ e dunque $\eta \in A \cup B$.

$\cap$) Sia $\xi \in A \cap B$, cioè $\xi \in A$ e $\xi \in B$, da cui $\{\, n \mid \xi_n \in A_n \,\} \in \mathcal{U}$ e $\{\, n \mid \xi_n \in B_n \,\} \in \mathcal{U}$. Ne segue che

$$\{\, n \mid \xi_n \in A_n \cap B_n \,\} = \{\, n \mid \xi_n \in A_n \,\} \cap \{\, n \mid \xi_n \in B_n \,\} \in \mathcal{U}$$

cioè $\xi \in \langle A_n \cap B_n\rangle$. Mentre se $\eta \in \langle A_n \cap B_n\rangle$, allora

$$\{\, n \mid \eta_n \in A_n \cap B_n \,\} \subseteq \{\, n \mid \eta_n \in A_n \,\} \in \mathcal{U}$$

cioè $\eta \in A$. Analogamente si ha $\eta \in B$, da cui $\eta \in A \cap B$.

\) Poiché $A \setminus B = A \cap B^C$, basta dimostrare che anche B^C è interno e corrispondente a $\langle B_n^C \rangle$. Si ha che

$$\begin{aligned}
\xi \in B^C &\iff \xi \notin B \iff \{\, n \mid \xi_n \in B_n \,\} \notin \mathcal{U} \\
&\iff \{\, n \mid \xi_n \in B_n \,\}^C = \left\{\, n \;\middle|\; \xi_n \in B_n^C \,\right\} \in \mathcal{U} \\
&\iff \xi \in \langle B_n^C \rangle.
\end{aligned}$$