Esercizi del Corso “Ultrafiltri e Metodi Non Standard”

Federico Glaudo

26 marzo 2015

1 Insiemi interni di ${}^*\mathbb{N}$

In queste note il modello scelto per gli ipernaturali è $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ dove $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro fissato.

Enunciamo senza dimostrazione il seguente lemma, che, pur essendo quasi tautologico, è piuttosto tedioso da mostrare in dettaglio. L'idea per dimostrarlo è sfruttare risultati analoghi riguardanti le proprietà di iniettività e suriettività.

Lemma 1.1. *Siano $A = [(A_n)]$, $B = [(B_n)]$ due insiemi interni di ${}^*\mathbb{N}$. Allora una funzione interna $f = [(f_n)] : A \to B$ è una bigezione se e solo se le funzioni $f_n : A_n \to B_n$ sono bigettive quasi ovunque (cioè l'insieme degli n per cui sono bigettive appartiene ad $\mathcal{U}$).*

Proposizione 1.2. *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ un insieme interno degli ipernaturali, allora esiste una bigezione* interna *tra A e ${}^*\mathbb{N}$ se e solo se A è iperinfinito.*

Dimostrazione. Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ una successione di insiemi appartenente alla classe d'equivalenza di successioni che definisce A[1].

Mostriamo innanzitutto che se A è iperinfinito allora esiste una bigezione interna tra A e ${}^*\mathbb{N}$. Se A è iperinfinito allora per quasi ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme A_n è infinito, e quindi esiste una bigezione $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ per quasi ogni $\mathbb{N}$. Quindi la funzione $f = [(f_n)]$[2] risulta essere una bigezione tra A ed ${}^*\mathbb{N}$ per il Lemma 1.1.

Viceversa assumiamo che esista una bigezione interna $f = [(f_n)]$ tra ${}^*\mathbb{N}$ e A e mostriamo che A è iperinfinito. Essendo f una bigezione, ancora applicando il Lemma 1.1, per quasi ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n : A_n \to \mathbb{N}$ è bigettiva e perciò l'insieme A_n è infinito. Ma ciò equivale ad affermare che l'insieme interno A è iperinfinito, come cercato. □

Teorema 1.3 (Saturazione numerabile)**.** *Sia $(A_n)_{\mathbb{N}} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ una successione di insiemi interni con la proprietà dell'intersezione finita, allora l'intersezione $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è non vuota.*

Dimostrazione. Mostriamo la tesi costruendo, con l'assioma della scelta, un ipernaturale che appartiene all'intersezione degli A_n.

Sia $(A_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ una successione di insiemi appartenente alla classe d'equivalenza di successioni che definisce A_n. Senza perdità di generalità possiamo assumere che tutti gli insiemi del tipo A_{1k} siano non vuoti, infatti sono non vuoti quasi ovunque (nel senso della misura indotta da $\mathcal{U}$) poiché A_1 è non vuoto e cambiare gli insiemi su un insieme di indici trascurabile non cambia A_1.

[1] Stiamo solo esplicitando cosa vuol dire essere un insieme interno.

[2] In realtà le f_n sono definite per quasi ogni n, ma ciò è sufficiente a definire f.

Chiamiamo $\mathbb{N}_k$ il più grande segmento iniziale di $\mathbb{N}$ tale che valga

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_k} A_{nk} \neq \emptyset \, .$$

Per l'ipotesi aggiuntiva fatta sugli A_{1k}, l'insieme $\mathbb{N}_k$ non è mai vuoto.

A questo punto, con l'assioma della scelta, costruiamo una successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ valga

$$a_k \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_k} A_{nk} \, .$$

Mostriamo ora che l'ipernaturale $a = [(a_k)]$ appartiene ad ogni A_n, concludendo così la dimostrazione. Fissato n_0, dal fatto che se $n_0 \in \mathbb{N}_k$ allora $a_k \in A_{n_0 k}$, è facile dedurre la catena di implicazioni

$$\{k \in \mathbb{N} : n_0 \in \mathbb{N}_k\} \in \mathcal{U} \implies \{k \in \mathbb{N} : a_k \in A_{n_0 k}\} \in \mathcal{U} \iff a \in A_{n_0} \, ,$$

perciò è sufficiente mostrare la prima appartenenza per avere la tesi. Inoltre, per definizione di $\mathbb{N}_k$, risulta vera l'equivalenza

$$n_0 \in \mathbb{N}_k \iff \bigcap_{n=1}^{n_0} A_{nk} \neq \emptyset$$

e quindi, per concludere, è sufficiente dimostrare

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \bigcap_{n=1}^{n_0} A_{nk} \neq \emptyset \right\} \in \mathcal{U} \, .$$

Tale condizione è però equivalente ad affermare che l'intersezione $\bigcap_{n=1}^{n_0} A_n$ è non vuota e ciò ci è assicurato dal fatto che gli A_n hanno la proprietà dell'intersezione finita. $\square$