Esercizi del corso di "Ultrafiltri e metodi non standard"

Giada Franz

26 marzo 2015

1 Pre-ordine di Rudin-Keisler

Definizione 1.1. Date f, $g : I \to J$ e dato $\mathscr{U}$ un ultrafiltro su I, indicheremo $f \equiv_{\mathscr{U}} g$ se l'insieme in cui f e g coincidono appartiene all'ultrafiltro, cioè se $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathscr{U}$.

Definizione 1.2. Dati $f : I \to J$ e $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, definiamo $f(\mathscr{U}) = \{A \subseteq J \mid f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\}$.

Proposizione 1.3. *Dati $f : I \to J$ e $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, $f(\mathscr{U})$ è un ultrafiltro su J.*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice e consta nel verificare innanzitutto che $f(\mathscr{U})$ è un filtro e successivamente che se $A^c \notin f(\mathscr{U})$ allora $A \in f(\mathscr{U})$, dimostrando così che $f(\mathscr{U})$ è un ultrafiltro.

Verifichiamo quindi che $f(\mathscr{U})$ ha tutte le proprietà richieste:

- Banalmente l'insieme vuoto non appartiene a $f(\mathscr{U})$, perché altrimenti avrei che $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathscr{U}$, che è assurdo.
- Siano A e B due elementi di $f(\mathscr{U})$, allora $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathscr{U}$, quindi $A \cap B$ appartiene a $f(\mathscr{U})$, che perciò è chiuso per intersezione.
- Sia ora $A \in f(\mathscr{U})$ e $B \supseteq A$, allora $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$ e perciò $f^{-1}(B) \in \mathscr{U}$, visto che $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Quindi $B \in f(\mathscr{U})$ e di conseguenza $f(\mathscr{U})$ è chiuso per sovrainsiemi.
- Sia ora A un sottoinsieme di J tale che $A^c \notin f(\mathscr{U})$. Questo vuol dire che $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \notin \mathscr{U}$, da cui perciò $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, poiché $\mathscr{U}$ è un ultrafiltro. Di conseguenza otteniamo che $A \in f(\mathscr{U})$.

Le prime tre proprietà dimostrano che $f(\mathscr{U})$ è un filtro su J, mentre la quarta ci dice che $f(\mathscr{U})$ è proprio un ultrafiltro, concludendo così la dimostrazione. □

Proposizione 1.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Date $f : I \to J$, $g : J \to K$ e dato $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, si ha che $g \circ f(\mathscr{U}) = g(f(\mathscr{U}))$.*
2. *Dati $f : I \to I$ e $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, se $f(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$ allora $f \equiv_{\mathscr{U}} id$.*
3. *Date f, $g : I \to J$ e dato $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, se $f \equiv_{\mathscr{U}} g$ allora $f(\mathscr{U}) = g(\mathscr{U})$.*

Dimostrazione. 1 Vale che $g \circ f(\mathscr{U}) = \{A \in K \mid (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathscr{U}\} = \{A \in K \mid f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathscr{U}\} = \{A \in K \mid g^{-1}(A) \in f(\mathscr{U})\} = g(f(\mathscr{U}))$, che è quello che volevamo.

2 Notiamo innanzitutto che $f(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$ implica che per ogni $A \subseteq I$ vale che $A \in \mathscr{U}$ se e solo se $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$.

Sia ora $A = \{i \in I \mid f(i) = i\}$, la tesi equivale a dimostrare che A appartiene ad $\mathscr{U}$. Chiamiamo $B = A^c$ e supponiamo per assurdo che $A \notin \mathscr{U}$, allora vale che $B \in \mathscr{U}$ perché $\mathscr{U}$ è un ultrafiltro.

Poiché f non ha punti fissi su B, per una facile conseguenza del Teorema dei tre colori esiste una 3-colorazione *buona* di B, cioè tale che x ed $f(x)$ hanno colori diversi per ogni $x \in B$ tale che $f(x) \in B$. Indichiamo tale colorazione con $B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$.

Per le proprietà degli ultrafiltri almeno uno fra i C_i appartiene a $\mathscr{U}$ (perché $B \in \mathscr{U}$); supponiamo senza perdità di generalità $C_1 \in \mathscr{U}$. Allora per quanto detto precedentemente vale che $f^{-1}(C_1) \in \mathscr{U}$, ma per come abbiamo costruito la colorazione $C_1 \cap f^{-1}(C_1) = \emptyset$, il che risulta assurdo perché entrambi i sottoinsiemi appartengono ad $\mathscr{U}$ e non possono quindi avere intersezione vuota.

3 Supponiamo che $f \equiv_{\mathscr{U}} g$ e dimostriamo che $f(\mathscr{U}) = g(\mathscr{U})$. In particolare ci basta dimostrare che $f(\mathscr{U}) \subseteq g(\mathscr{U})$, poiché l'altro contenimento si dimostrerà analogamente per simmetria.

Sia quindi $A \subseteq J$ tale che $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, vogliamo dimostrare che $g^{-1}(A) \in \mathscr{U}$. Chiamiamo $B = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$, che appartiene a $\mathscr{U}$ per definizione di $\equiv_{\mathscr{U}}$. Visto che f e g coincidono su $\mathscr{U}$, otteniamo che $g^{-1}(A) \cap B = f^{-1}(A) \cap B \in \mathscr{U}$, da cui $g^{-1}(A) \in \mathscr{U}$ perché $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi.

□

Definizione 1.5. Dati $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ ultrafiltri su I diciamo che $\mathscr{U} \leq_{RK} \mathscr{V}$ se esiste $f : I \to I$ tale che $f(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$. Tale relazione è detta pre-ordine di Rudin-Keisler.

Proposizione 1.6. *Dati $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ ultrafiltri su I, se $\mathscr{U} \leq_{RK} \mathscr{V}$ e $\mathscr{V} \leq_{RK} \mathscr{U}$ allora $\mathscr{U} \cong \mathscr{V}$, cioè esiste una bigezione $\sigma : I \to I$ tale che $\sigma(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$.*

Dimostrazione. Per definizione di pre-ordine di Rudin-Keisler esistono $f, g : I \to I$ tali che $f(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$ e $g(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$. Per il punto 1 della Proposizione 1.4, vale che $f \circ g(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$ e $g \circ f(\mathscr{V}) = \mathscr{V}$, da cui $f \circ g \equiv_{\mathscr{U}} id$ e $g \circ f \equiv_{\mathscr{V}} id$ per il punto 2 della stessa proposizione.

Sia ora $A = \{i \in I \mid f \circ g(i) = i\}$, allora A appartiene ad $\mathscr{U}$ per quanto appena detto. Chiamiamo inoltre $B = g(A)$.

Abbiamo che $f \circ g$ è l'identità su A e $g \circ f$ è l'identità su B (infatti $g(f(g(i))) = g(i)$, perché $f(g(i)) = i$ su A), quindi è facile osservare che $g|_A : A \to B$ è una bigezione.

Se A^c e B^c hanno la stessa cardinalità possiamo estendere $g|_A$ ad una bigezione $\sigma : I \to I$. Poiché σ coincide con g su $A \in \mathscr{U}$, abbiamo che $\sigma \equiv_{\mathscr{U}} g$ e per il punto 3 della Proposizione 1.4 risulta quindi che $\sigma(\mathscr{U}) = g(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, da cui la tesi.

Supponiamo quindi che A^c e B^c abbiamo cardinalità diversa, allora deve valere necessariamente che I ha cardinalità infinita e $|A^c| \leq |A|$, $|B^c| \leq |B|$; infatti se I ha cardinalità infinita vale $|I| = \max\{|A|, |A^c|\} = \max\{|B|, |B^c|\}$ e ciò sarebbe assurdo se A^c e B^c avessero cardinalità diversa e uno dei due avesse cardinalità maggiore del suo complementare.

Dividiamo quindi A in due parti $A = C_1 \sqcup C_2$ di uguale cardinalità; poiché $A \in \mathscr{U}$, possiamo supporre che C_1 appartenga a sua volta a $\mathscr{U}$. Allora vale che $|C_1| = |C_1^c| = |A| = \max\{|A|, |A|^c\} = |I|$ (perché $|C_2| = |C_1|$ e $C_2 \subseteq C_1^c$) e $|f(C_1)| = |f(C_2)| = |f(C_1)^c| = |I|$ analogamente; perciò esiste una bigezione fra C_1^c e $f(C_1)^c$ e di conseguenza posso estendere $g|_{C_1}$ ad una bigezione $\sigma : I \to I$. Questo conclude la dimostrazione ripetendo il ragionamento fatto precedentemente. □