① LEZIONE 1

Sia $\mathcal{F}$ filtro su un insieme I. Sse:

(1) $A^c \notin \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$

(2) Ogni volta che un'unione finita $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists i$ t.c. $A_i \in \mathcal{F}$

(3) $\mathcal{F}$ è massimale (rispetto all'inclusione)

__Dim:__ (1) $\Rightarrow$ (2)

Se per assurdo esistono $A_1, \ldots, A_n$ tali che $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$ ma $A_i \notin \mathcal{F}\ \forall i$, allora $A_i^c \in \mathcal{F}\ \forall i \ldots \in \mathcal{F} \ni A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c = (A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c$ che è assurdo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $A^c \notin \mathcal{F}$. $A \cup A^c = I \in \mathcal{F}$ allora $A \in \mathcal{F}$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Se $\mathcal{F}$ non è massimale, allora esiste $\mathcal{F}'$ filtro t.c. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Quindi esiste $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, ma allora $A^c \in \mathcal{F}$, dunque $A, A^c \in \mathcal{F}'$ e questo è assurdo ($A \cap A^c = \emptyset$)

(3) $\Rightarrow$ (1) Sia $\mathcal{F}$ massimale e supponiamo per assurdo che ~~≠~~ esiste $A \in P(I)$ tale che $A, A^c \notin \mathcal{F}$.

Siano $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_{A^c} \subseteq P(I)$ le "estensioni" di $\mathcal{F}$ aggiungendo a $\mathcal{F}$

$A,\ A \cap B\ \forall B \in \mathcal{F},\ C \supseteq A$

$A^c,\ A^c \cap B\ \forall B \in \mathcal{F},\ C \supseteq A^c$

rispettivamente.

Poiché $\mathcal{F}$ è massimale, ~~se~~ $\mathcal{F}_A$ e $\mathcal{F}_{A^c}$ non sono filtri, allora esiste $B \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{F}$ tali che

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A^c \cap B \neq \emptyset$

$A^c \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$

Quindi abbiamo trovato che

$A \cap (B \cap C) = \emptyset$ e $A^c \cap (B \cap C) = \emptyset$

e questo è assurdo ∎

② Ogni ideale massimale di $Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ corrisponde a un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ e viceversa

<u>Dim</u>: Sia $\varphi \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, definisco $Z(\varphi) = \{ n \mid \varphi(n) = 0 \}$.

Supponiamo di avere $\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N}$, definisco $M = \{ \varphi \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid Z(\varphi) \in \mathcal{U} \}$

• M è un ideale:

se $\varphi, \psi \in M \Rightarrow Z(\varphi + \psi) = \{ n \mid (\varphi + \psi)(n) = 0 \}$
$\supseteq Z(\varphi) \cap Z(\psi) \in \mathcal{U}$

se $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\varphi \in M$ $Z(f \cdot \varphi) \supseteq Z(\varphi) \in \mathcal{U}$

• M è massimale:

sia $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ vediamo che esistono $a \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\varphi \in M$ tali che $af + \varphi = 1$

se $f \notin M$ allora $Z(f) \notin \mathcal{U}$, quindi $Z(f)^c \in \mathcal{U}$

Prendo $a(n) = \begin{cases} 1/f(n) & \text{se } f(n) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\varphi(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(n) \neq 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Viceversa dato M ideale massimale di $Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, dico che $\mathcal{U} = \{ Z(\varphi) \mid \varphi \in M \}$ è un ultrafiltro.:

• $\mathcal{U}$ è un filtro

$\emptyset \notin \mathcal{U}$ altrimenti esisterebbe $\varphi \in M$ con $Z(\varphi) = \emptyset$, ma allora φ sarebbe invertibile.

$\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ perché $\mathbb{N} = Z(0)$ e $0 \in M$

se $B \supseteq Z(\varphi)$, $\varphi \in M$, prendo $\xi \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ con $B = Z(\xi)$, dico che $\xi \in M$.

Altrimenti esisterebbero $a, b \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tali che $a\xi + b\varphi = 1$ e questo è assurdo perché $Z(a\xi + b\varphi) \supseteq Z(\varphi) \neq \emptyset$

se $\varphi, \psi \in M$ allora $Z(\varphi) \cap Z(\psi) \in \mathcal{U}$?

Sia $a \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tale che

$a(n) = \begin{cases} -1 & \text{se } \varphi(n) = -\psi(n) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

allora $\xi = a\varphi + \psi \in M$ e $Z(\xi) = Z(\varphi) \cap Z(\psi) \in \mathcal{U}$

• $\mathcal{U}$ è massimale

Sia $A \notin \mathcal{U}$ e sia $f \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ t.c. $Z(f) = A$, $f \notin M$ allora esistono $a \in Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ e $\varphi \in M$ tali che $af + \varphi = 1$.

Quindi $\varphi = 1 - af$ e $Z(\varphi) = \{ n \in \mathbb{N} \mid (af)(n) = 1 \} \subseteq (Z(f))^c = A^c \in \mathcal{U}$ ∎

③ X è compatto se e solo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I e ~~per~~ ogni successione ammette $\mathcal{U}$-limite

<u>Dim</u>: ($\Rightarrow$) Sia X compatto e sia $(a_i)_{i\in I}$ una successione a valori in X, e supponiamo per assurdo che $(a_i)_{i\in I}$ non abbia $\mathcal{U}$-limite. Allora $\forall x\in X\ \exists U_x$ intorno di x tale che $A_x=\{i\in I \mid a_i\in U_x\}\notin\mathcal{U}$, per qualche ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I.
Possiamo prendere U_x aperto. Poiché X è compatto e $\{U_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X, esiste un sottoricoprimento finito $X=U_{x_1}\cup\ldots\cup U_{x_n}$.
Ma allora $I=A_{x_1}\cup\ldots\cup A_{x_n}$, quindi $\exists j\in\{1,\ldots,n\}$ tale che $A_{x_j}\in\mathcal{U}$ e questo è assurdo.

($\Leftarrow$) Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di X e supponiamo per assurdo che non ammette un sottoricoprimento finito. Possiamo assumere che $\{U_i\}_{i\in I}$ sia un ricoprimento "minimale", nel senso che se $J\subset I$, $\bigcup_{j\in J} U_j\subset X$, quindi $\forall i\in I\ \exists x$ t.c. $x\in U_i\setminus\left(\bigcup_{j\neq i} U_j\right)$.
Prendiamo la successione $(a_i)_{i\in I}$ tale che $a_i\in U_i\setminus\left(\bigcup_{j\neq i} U_j\right)$.

Per ipotesi si ha che $(a_i)_{i\in I}$ ammette un $\mathcal{U}$-limite x, quindi $\forall U$ intorno di x $\{i\in I \mid a_i\in U\}\in\mathcal{U}$.
Ora $U\cap U_i\neq\emptyset$ per qualche i e $U\not\subset U_i$ $\forall i\in I$, infatti se $\mathcal{U}$ è non principale e $a_i\in U$, allora $\exists j\neq i$ t.c. $a_j\in U$ e $a_j\notin U_i$.
Di conseguenza per ogni $i\in I$ $U\cap U_i$ ~~≠~~ non può essere un intorno di x, quindi $x\notin U\cap U_i$, perché conterrebbe un aperto contenuto in U_i.
Abbiamo dunque trovato che $x\notin U_i$ $\forall i\in I$, da cui $x\notin\bigcup_{i\in I} U_i=X$ e questo è assurdo ∎

④ Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici compatti, allora $X=\prod_{i\in I} X_i$ è compatto

<u>Dim</u>: Vediamo che per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ ~~e~~ ~~per~~ ogni successione $(a_k)_{k\in K}$ ammette $\mathcal{U}$-limite.
Sia quindi $(a_k)_{k\in K}$ una successione a valori in X e consideriamo $\forall i\in I$ le successioni $(a_{ik})_{k\in K}$ a valori in X_i (a_{ik} è la componente i-esima di a_k).

Poiché X_i è compatto allora $(a_{ik})_{k\in K}$ converge a un certo $x_i \in X_i$, $\forall i \in I$. Quindi $\forall U$ intorno di x_i $\{k \in K \mid a_{ik} \in U\} \in \mathcal{U}$

Prendo $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ e dico che x è limite di $(a_k)_{k\in K}$.

Sia U intorno di x, ci chiediamo se $\{k \in K \mid a_k \in U\} \in \mathcal{U}$. Possiamo supporre U aperto, di un sistema fond. di intorni, U sarà della forma

$U = \left(\bigcap_{l=1}^{n} \pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l})\right)$ (π_i è la proiezione i-esima $\pi_i : X \to X_i$)

con U_{i_l} intorno (aperto) di x_{i_l} in X_{i_l}.

Per $l \in \{1, \dots, m\}$, $A_{i_l} = \{k \in K \mid a_{i_l k} \in U_{i_l}\} \in \mathcal{U}$ quindi $\bigcap_{l=1}^{n} A_{i_l} \in \mathcal{U}$ da cui

$\{k \mid a_k \in U\} \in \mathcal{U}$ ∎

⑤ X spazio topologico è di Hausdorff se e solo se, per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I ogni successione ha al più un $\mathcal{U}$-limite

Dim: Sia X di Hausdorff e sia $(a_i)_{i\in I}$ una successione a valori in X. Se per assurdo $(a_i)_{i\in I}$ ammettesse due $\mathcal{U}$-limiti x e y, $x \neq y$, per qualche $\mathcal{U}$ ultrafiltro, allora $\forall U$ intorno di x $A_U = \{i \in I \mid a_i \in U\} \in \mathcal{U}$ e $\forall V$ intorno di y $A_V = \{i \in I \mid a_i \in V\} \in \mathcal{U}$, ma allora per ogni U intorno di x e per ogni V intorno di y, $A_U \cap A_V \neq \emptyset$, da cui $U \cap V \neq \emptyset$ e questo contraddice la proprietà di Hausdorff.

(⇐) Supponiamo per assurdo che X non sia di Hausdorff, allora esistono $x, y \in X$, $x \neq y$, tali che $\forall U$ intorno di x e $\forall V$ intorno di y, $U \cap V \neq \emptyset$.

Siano $\{U_k\}_{k\in K}$ e $\{V_k\}_{k\in K}$ sistemi fondamentali di intorni di x e di y rispettivamente con la stessa cardinalità (si può sempre fare aggiungendo aperti a quello di card. minore). Costruiamo una

l'idea era costruire due catene di $\{U_i\}$ e $\{V_i\}$ e intersecarle, e definire una successione $a_i \in U_i \cap V_i$, che avrebbe avuto $\mathcal{U}$-limite x e y trovando un assurdo. Non sono riuscita a formalizzare bene questa idea.

LEZIONE 2:

① Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I. Sse:

(1) $\mathcal{U}$ non è principale

(2) se F è finito, $F \notin \mathcal{U}$

(3) $\mathcal{U}$ estende il filtro di Frechet, cioè $\mathcal{F}r(I) \subseteq \mathcal{U}$.

Dim: (1) ⇒ (2) Fatto a lezione

(2) ⇒ (3) Vogliamo vedere che $\mathcal{F}r(I) \subseteq \mathcal{U}$.
Sia $A \in \mathcal{F}r(I)$, se $A \notin \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$, ma A^c è finito per definizione, dunque $A \in \mathcal{U}$.

(3) ⇒ (1): $\mathcal{F}r(I) \subseteq \mathcal{U}$, allora $\forall i \in I$, $I \setminus \{i\} \in \mathcal{U}$
$\Rightarrow \{i\} \notin \mathcal{U} \quad \forall i \in I$. $\blacksquare$

② (1) $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro

(2) $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale sse sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ sono principali

(3) $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$

(4) Se $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$

Dim: (1) • $\emptyset \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, altrimenti
$\{i \in I \mid \emptyset_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, cioè $\emptyset_i = \{j \in J \mid (i,j) \in \emptyset\} = \emptyset$
e dunque $\emptyset \in \mathcal{U}$, assurdo.

• $A = I \times J \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, infatti
$A_i = \{j \in J \mid (i,j) \in A\} = J \quad \forall i \in I \Rightarrow \{i \in I \mid A_i \in \mathcal{U}\} = I \in \mathcal{U}$.

• $A, B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$?

$(A \cap B)_i = \{j \in J \mid (i,j) \in A \cap B\} = \{j \in J \mid (i,j) \in A\} \cap \{j \in J \mid (i,j) \in B\} = A_i \cap B_i$

$\{i \in I \mid A_i \cap B_i \in \mathcal{V}\} = \underbrace{\{i \in I \mid A_i \in \mathcal{V}\}}_{\in \mathcal{U}} \cap \underbrace{\{i \in I \mid B_i \in \mathcal{V}\}}_{\in \mathcal{U}} \in \mathcal{U}$

• $B \supseteq A$, $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Rightarrow B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$?
$\{j \in J \mid (i,j) \in B\} \supseteq \{j \in J \mid (i,j) \in A\}$
$\Rightarrow \underbrace{\{i \in I \mid A_i \in \mathcal{V}\}}_{\in \mathcal{U}} \subseteq \{i \in I \mid B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$

• È massimale? Sia $A \subseteq I \times J$ t.c. $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$
$\Rightarrow \{i \in I \mid A_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U} \Rightarrow \{i \in I \mid A_i^c \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$
$\Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$

(2) (⇒) $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ principale, sia $(\underline{i}, \underline{j}) \in I \times J$ t.c. $\{\underline{i}, \underline{j}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Rightarrow \{i \in I \mid \{j \in J \mid (i,j) \in \{(\underline{i},\underline{j})\}\} \in \mathcal{V}\} = \{\underline{i}\} \in \mathcal{U}$ e $\{\underline{j}\} \in \mathcal{V}$

(⇐) Se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sono principali, allora $\exists \underline{i} \in I$, $\underline{j} \in J$ t.c. $\{\underline{i}\} \in \mathcal{U}$, $\{\underline{j}\} \in \mathcal{V}$
$\Rightarrow \{i \in I \mid \{j \in J \mid (i,j) \in \{(\underline{i},\underline{j})\}\} \in \mathcal{V}\} = \{\underline{i}\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{(\underline{i},\underline{j})\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$

(3) $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} \overset{?}{=} \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$
$\mathcal{U}$ ultrafiltro su I
$\mathcal{V}$ " " J
$\mathcal{W}$ " " K

Sia $A \subseteq I \times J \times K$, $A \in (\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\otimes\mathcal{W}$

$\iff \mathcal{U}\otimes\mathcal{V} \ni \{(i,j)\in I\times J \mid \{k\in K \mid ((i,j),k)\in A\}\in\mathcal{W}\} =$

$=\{(i,j)\in I\times J \mid \{k\in K \mid (i,(j,k))\in A\}\in\mathcal{W}\}$

$\iff \{i\in I \mid \{j\in J \mid (i,j)\in\{(i,j)\in I\times J \mid \{k\in K \mid (i,(j,k))\in A\}\in\mathcal{W}\}$
$\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$

$\iff \{i\in I \mid \{j\in J \mid \{k\in K \mid (i,(j,k))\in A\}\in\mathcal{W}\}\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$

$\iff \{i\in I \mid \{(j,k)\in J\times K \mid (i,(j,k))\in A\}\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}\}\in\mathcal{U}$

$\iff A\in\mathcal{U}\otimes(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$

④ Siano $\mathcal{U},\mathcal{V}$ ultrafiltri su $\mathbb{N}$ t.c.
$2\mathbb{N}\in\mathcal{U}$ e $(2\mathbb{N})^c\in\mathcal{V}$

$2\mathbb{N}\times(2\mathbb{N})^c\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V} \iff$

$\{m\in\mathbb{N} \mid \{n\in\mathbb{N} \mid (m,n)\in 2\mathbb{N}\times(2\mathbb{N})^c\}\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$

$\iff 2\mathbb{N}\in\mathcal{U}$ e $(2\mathbb{N})^c\in\mathcal{V}$,

ma $2\mathbb{N}\times(2\mathbb{N})^c\notin\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}$ perché

$\{m\in\mathbb{N} \mid \{n\in\mathbb{N} \mid (m,n)\in 2\mathbb{N}\times(2\mathbb{N})^c\}\in\mathcal{U}\} =$

ma $\{n\in\mathbb{N} \mid (m,n)\in 2\mathbb{N}\times(2\mathbb{N})^c\}\notin\mathcal{U}$

perché $\subseteq (2\mathbb{N})^c\notin\mathcal{U}$. ∎