Esercizi lezione 16/3/15, Andrea Vaccaro

25 marzo 2015

Proposizione 0.1. *Mostrare che la famiglia degli interni è chiusa per intersezione, unione e differenza.*

Dimostrazione. Siano A e B interni, con $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le successioni di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ associate. Si ha allora che $[\xi] \in A \cap B \iff \{n : \xi_n \in A_n\} \in U \wedge \{n : \xi_n \in B_n\} \in U \iff \{n : \xi_n \in A_n\} \cap \{n : \xi_n \in B_n\} \in U$, ma poiché l'ultimo insieme è uguale a $\{n : \xi_n \in A_n \cap B_n\}$, anche questo giace in U, perciò $A \cap B$ è interno, associato alla successione $\{A_n \cap B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Passando all'unione, si ha $[\xi] \in A \cup B \iff X = \{n : \xi_n \in A_n\} \in U \vee Y = \{n : \xi_n \in B_n\} \in U \iff Z = \{n : \xi_n \in A_n \cup B_n\} \in U$. L'ultima equivalenza vale poiché da un lato $X \cup Y = Z$ e se uno dei primi due è in U lo è anche il terzo. D'altro canto X e Y definiscono un ricoprimento di Z, perciò se $Z \in U$, allora anche uno fra X e Y sarà in U. Perciò $A \cup B$ è interno con successione $\{A_n \cup B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Infine, per la differenza, grazie al fatto che U è ultrafiltro, segue che $[\xi] \in A \setminus B \iff \{n : \xi_n \in A_n\} \in U \wedge \{n : \xi_n \in B_n\} \notin U \iff \{n : \xi_n \in A_n\} \in U \wedge \{n : \xi_n \in B_n^{\mathrm{c}}\} \in U \iff \{n : \xi_n \in A_n\} \cap \{n : \xi_n \in B_n^{\mathrm{c}}\} \in U$. Dal momento che l'ultimo insieme indicato è uguale a $\{n : \xi_n \in A_n \setminus B_n\}$, la tesi segue con la successione $\{A_n \setminus B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Proposizione 0.2. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|A\cap[1,n]|}{n} = \alpha \Rightarrow \exists\nu$ *infinito* : $\frac{|{}^*A\cap[1,\nu]|}{\nu} \sim \alpha$

Dimostrazione. Per verificare la tesi, sfruttiamo il seguente fatto. Sia a_n limitata (la nostra successione è addirittura limitata positiva).

Claim 0.3. $\limsup_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff l = \max\{st(a_\nu) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\}$

Per verificare ciò mostriamo prima la seguente equivalenza:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l \in \mathbb{R} \iff \exists\nu \text{ infinito tale che } st(a_\nu) \geq l$$

Supponiamo valga $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$. Posso quindi trovare una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che ammetta limite $l' \geq l$; ponendo $b_k = a_{n_k}$, per un esercizio dimostrato precedentemente, ciò equivale a dire che per ogni μ infinito si ha $b_\mu \sim l'$, se allora $\nu = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (infinito perché $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente) vale che $st(a_\nu) = st(b_\eta) \geq l$ con $\eta = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Viceversa, sia ν infinito tale che $st(a_\nu) \geq l$. Chiamiamo ancora ν una successione rappresentante $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$. Per ogni n per ipotesi esiste $A_n \in U$ tale per cui per $k \in A_n$ si abbia $a_{\nu_k} > l - \frac{1}{n}$. Per ogni n sia $C_n \in U$ insieme su cui la successione ν sia maggiore di n; definisco in modo induttivo k come il minimo di $A_k \cap C_{\nu_{k-1}} \in U$. In questo modo la successione $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente, perciò $\{a_{\nu_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione degli a_n; in particolar modo, dal momento che ogni $k \in A_k$, allora $a_{\nu_k} > l - \frac{1}{k}$, cioè la successione degli a_n ha limite superiore maggiore o uguale a l, e quindi segue la tesi.

Dire quindi $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$, equivale a $l \leq \sup\{st(a_\nu) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\}$ (per quel che riguarda $\Leftarrow$, se $l < \sup\{st(a_\nu) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\}$ è ovvio, se vale $=$ allora per ogni $\epsilon > 0$ trovo $st(a_\nu) \geq l-\epsilon$, e di conseguenza $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l-\epsilon$) , ma d'altro canto si ha che $\limsup_{n\to\infty} a_n \not> l$ equivale a dire che per ogni ν infinito si abbia $st(a_\nu) \not> l+\epsilon$ con $\epsilon \in \mathbb{R}$ positivo. Ma visto che l'ultimo fatto vale per ogni ϵ, si ottiene che $st(a_\nu) \leq l$ per ogni ν; abbiamo quindi $\limsup_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff l = \sup\{st(a_\nu) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}\}$. Quindi la direzione $\Leftarrow$ del claim è ovvia; l'altra direzione vale perché $\limsup_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$, quindi esiste ν tale che $st(a_\nu) \geq l$.

A questo punto, dire $\limsup_{n\to\infty} \frac{|A\cap[1,n]|}{n} = \alpha$ equivale a dire che esiste $\nu = (\nu_n)$ infinito tale che $a_\nu \sim \alpha$. Ma visto che $a_n = \frac{|A\cap[1,n]|}{n}$, si verifica che $a_\nu = (\frac{|A\cap[1,\nu_n]|}{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{|A_{\nu_n}\cap[1,\nu_n]|}{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ definendo la successione $A_k = A$ per ogni k. In questo senso posso considerare l'inieme interno ${}^*A$, e visto che $|{}^*A\cap[1,\nu]| = (|A_{\nu_n}\cap[1,\nu_n]|)_{n\in\mathbb{N}}$, si ottiene che $a_\nu = \frac{|{}^*A\cap[1,\nu]|}{\nu}$, e dunque la tesi è verificata. $\square$

Proposizione 0.4. *Siano U, V, W ultrafiltri rispettivamente su I, J e K.* $U \leq_{RK} V \leq_{RK} W \Rightarrow U \leq_{RK} W$

Dimostrazione. Per ipotesi esistono $g : K \to J$ tale che $g(W) = V$ e una $f : J \to I$ tale che $f(V) = U$. Considero allora la funzione $f \circ g : K \to I$; si verifica che $(f \circ g)(W) = \big\{A \subseteq I : g^{-1}(f^{-1}(A)) \in W\big\}$, e poiché vale $g^{-1}(f^{-1}(A)) \in W \iff f^{-1}(A) \in V$, allora $(f \circ g)(W) = \big\{A \subseteq I : f^{-1}(A) \in V\big\} = f(V) = U$. $\square$

Proposizione 0.5. *Sia U un ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Verificare che $f(U) = U \Rightarrow \{n : f(n) = n\} \in U$.*

Dimostrazione. Per cominciare, mostriamo che se vale $f(U) = U$, e andiamo a considerare $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come f su un $A \in U$, allora otteniamo ancora $f'(U) = U$. $U \subseteq f'(U)$ vale poiché se $C \in U$, allora $f^{-1}(C) \in U$ ($U \subseteq f(U)$), quindi $f^{-1}(C) \cap A \in U$; su tale insieme si ha che f ed f' sono definite allo stesso modo, perciò $f'^{-1}(C) \cap A = f^{-1}(C) \cap A \in U$, e dunque anche $f'^{-1}(C)$ che lo contiene è in U, ergo $C \in f'(U)$.

Viceversa se $C \in f'(U)$, allora $f'^{-1}(C) \in U$ pertanto anche $f'^{-1}(C) \cap A \in U$, e dal momento che su tale insieme $f = f'$ e poiché $f(U) \subseteq U$, si ha $f(f'^{-1}(C) \cap A) = f'(f'^{-1}(C) \cap A) \in U$; dal momento che C contiene quest'ultimo insieme, segue la tesi.

Veniamo ora al teorema. Supponiamo vi sia f tale che $f(U) = U$ tale per cui però valga $\{n : f(n) = n\} \notin U$; poiché U ultrafiltro, ciò equivale a $A = \{n : f(n) \neq n\} \in U$. Per quanto detto prima, possiamo allora considerare $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come f su A, e tale per cui si abbia $f'(n) = n + 1$ su A^c. L'ipotesi assurda ci consente perciò di ricavare una f' senza punti fissi tale che valga $f'(U) = U$. Per il teorema dei 3 colori posso trovare una partizione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ tale che per ogni n si abbiano n ed $f(n)$ di colori diversi. Ora però si avrà che (a meno di rinominare) $C_1 \in U$ mentre gli altri due $C_i \notin U$, poiché U ultrafiltro. Dal momento che $f'(U) = U$, allora $f'(C_1) \in U$ (questo perchè $f'^{-1}(f'(C_1)) \supseteq C_1 \in U$), ma per quanto detto $f'(C_1) \subseteq C_2 \sqcup C_3$, dunque $C_2 \sqcup C_3 \in U$, il che è assurdo. $\square$

Proposizione 0.6. *Siano U e V ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Vale $U \leq_{RK} V$ e $V \leq_{RK} U$ se e solo se esiste σ bigezione tale che $\sigma(U) = V$.*

Dimostrazione. La freccia $\Leftarrow$ vale poiché da un lato σ è testimone del fatto che $V \leq_{RK} U$, d'altro canto considerando σ^{-1} si verifica che $\sigma^{-1}(V) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sigma(A) \in V\} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sigma^{-1}(\sigma(A)) = A \in U\} = U$, si ottiene $U \leq_{RK} V$.

Viceversa, siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $g(U) = V$ e $f(V) = U$; si ha che se considero $h = f \circ g$, allora $h(U) = (f \circ g)(U) = f(g(U)) = U$. Per l'esercizio precedente allora esiste $A \in U$ tale che h ristretta ad A sia l'identità, ovvero g ristretta ad A è iniettiva. Come nell'esercizio precedente, se riusciamo a definire $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uguale a g su A e bigettiva, abbiamo ottenuto la tesi. Se $\mathbb{N} \setminus A$ e $\mathbb{N} \setminus g(A)$ hanno la stessa cardinalità possiamo concludere, perché estendiamo g' con una qualunque bigezione fra i 2 insiemi. In caso contrario, A è infinito (se fosse finito anche $g(A)$ lo sarebbe e saremmo nel caso precedente), perciò possiamo partizionarlo in A_1 e A_2 entrambi infiniti. Sia, senza perdere di generalità, $A_1 \in U$; a questo punto, poiché g è iniettiva su A, sia $g(A_1)$ che $g(A_2)$ sono infiniti, perciò $|\mathbb{N} \setminus A_1| = |\mathbb{N} \setminus g(A_1)|$ (il primo contiene A_2, il secondo la sua immagine, entrambi insiemi infiniti), quindi in realtà costruisco g' definita come g su $A_1 \in U$ e altrove come una bigezione fra i 2 insiemi appena citati. Si ha quindi che g' è bigettiva e $g'(U) = g(U) = V$, dunque segue la tesi. $\square$