

Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 16-17/3/15

**Lemma 0.1.** *Data una funzione  $f : X \rightarrow X$  senza punti fissi, esiste una 3-colorazione di  $X$  tale che  $\forall x \in X$   $x$  ed  $f(x)$  hanno colori diversi.*

**Esercizio 0.1.** *La famiglia dei sottoinsiemi interni di  ${}^*\mathbb{R}$  è chiusa per unione finita, intersezione finita, differenza. (Chiamo  $\mathcal{U}$  l'ultrafiltro usato per costruire  ${}^*\mathbb{R}$ )*

*Dimostrazione.* Siano dati due sottoinsiemi  $A := \{[a_n | n \in \mathbb{N}] : a_n \in A_n\}$  e  $B := \{[b_n | n \in \mathbb{N}] : b_n \in B_n\}$  interni di  ${}^*\mathbb{R}$ :

- $A \cup B$  è interno perchè coincide con  $X$  generato da  $\langle A_n \cup B_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ : chiaramente  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq X$ , quindi  $A \cup B \subseteq X$ ; inoltre se  $[x_n] \in X$  allora  $\{i : x_i \in A_i \cup B_i\} \in \mathcal{U}$ , quindi per proprietà di ultrafiltro almeno uno dei due insiemi  $\{i : x_i \in A_i\}$  e  $\{i : x_i \in B_i\}$  appartiene a  $\mathcal{U}$ , cioè  $[x_n] \in A \cup B$ . Quindi  $X \subseteq A \cup B$ .
- $A \cap B$  è interno perchè coincide con  $X$  generato da  $\langle A_n \cap B_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ : le inclusioni  $X \subseteq A$  e  $X \subseteq B$  sono ovvie, da cui  $X \subseteq A \cap B$ ; inoltre se  $[x_n] \in A \cap B$  allora gli insiemi  $\{i : x_i \in A_i\}$  e  $\{i : x_i \in B_i\}$  stanno in  $\mathcal{U}$ , quindi per proprietà di filtro anche la loro intersezione  $\{i : x_i \in A_i \cap B_i\} \in \mathcal{U}$ , quindi  $[x_n] \in X$ , da cui  $A \cap B \subseteq X$ .
- Analogamente agli altri due casi,  $A \setminus B$  è interno in quanto coincide con l'insieme  $X$  generato da  $\langle A_n \setminus B_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ : è facile vedere che  $X \cap B = \emptyset$  e  $X \subseteq A$  da cui  $X \subseteq A \setminus B$ ; inoltre se  $[x_n] \in A \setminus B$  allora  $\{i : x_i \in A_i\} \in \mathcal{U}$  e  $\{i : x_i \notin B_i\} \in \mathcal{U}$  quindi per proprietà di filtro la loro intersezione  $\{i : x_i \in A_i \setminus B_i\} \in \mathcal{U}$  cioè  $[x_n] \in X$  da cui  $A \setminus B \subseteq X$ .

□

**Esercizio 0.2.** *Dato un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  su  $X$  e una funzione  $f : X \rightarrow X$ , vale*

$$f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Leftrightarrow \{x : f(x) = x\} \in \mathcal{U}$$

*Dimostrazione.*

( $\Rightarrow$ ) Partiziono  $X$  in 4 insiemi: uno è l'insieme  $F$  dei punti fissi di  $f$ ; usando il lemma, dato che  $f|_{X \setminus F}$  non ha punti fissi, si può partizionare  $X \setminus F$  in tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  in modo che  $x$  ed  $f(x)$  stiano in insiemi diversi  $\forall x \in X \setminus F$ . Per proprietà di ultrafiltro, esattamente uno tra  $F$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  appartiene all'ultrafiltro: se non fosse  $F$  e fosse invece ad esempio  $A \in \mathcal{U}$

avrei  $F \cup B \cup C \notin \mathcal{U}$  e  $f^{-1}(A) \subseteq F \cup B \cup C \notin \mathcal{U}$ , che è assurdo poichè, dal momento che  $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ , vale  $[A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}]$ . Quindi  $F \in \mathcal{U}$ .

( $\Leftarrow$ ) Detto sempre  $F$  l'insieme dei punti fissi di  $f$  e preso un qualsiasi insieme  $A \subseteq X$ , essendo  $F \in \mathcal{U}$  vale  $[A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \cap F \in \mathcal{U}]$ : ma allora valgono le seguenti implicazioni:

$$A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap F \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A \cap F) \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$$

dove la seconda implicazione è vera perchè  $f^{-1}(A \cap F) \supseteq A \cap F \in \mathcal{U}$  e la terza perchè  $f^{-1}(A) \supseteq f^{-1}(A \cap F) \in \mathcal{U}$ ; analogamente

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A) \cap F \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap F \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$$

perchè  $f^{-1}(A) \cap F = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(F) = f^{-1}(A \cap F) = A \cap F$ . Quindi  $[A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}]$  cioè  $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ .  $\square$

**Esercizio 0.3.** Non è vero in generale che  $[f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U}) \Rightarrow \{x : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}]$ .

*Dimostrazione.* Costruiamo un controesempio: consideriamo un qualsiasi ultrafiltro non principale  $\mathcal{U}$  su un qualsiasi insieme infinito  $X$ : consideriamo inoltre l'ultrafiltro  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$  su  $X \times X$ . Siano  $f : X \times X \rightarrow X$  e  $g : X \times X \rightarrow X$  definite da  $f((x, y)) = x$  e  $g((x, y)) = y$  ( $\forall x, y \in X$ ): è semplice verificare che  $f_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$  dal momento che, comunque preso  $A \subseteq X$  valgono

- $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$  perchè  $f^{-1}(A) = \{(a, x) : a \in A, x \in X\}$  e quindi  $\{x : \{y : (x, y) \in f^{-1}(A)\} \in \mathcal{U}\} = A$  (infatti l'insieme più interno dei due è  $X$  se  $x \in A$  ed è  $\emptyset$  altrimenti).
- $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{U}$  perchè  $g^{-1}(A) = \{(x, a) : a \in A, x \in X\}$  da cui  $\{x : \{y : (x, y) \in g^{-1}(A)\} \in \mathcal{U}\} = X$  se  $A \in \mathcal{U}$  ed è  $\emptyset$  altrimenti (infatti l'insieme più interno dei due è  $A$  indipendentemente da  $x$ ).

Tuttavia  $F := \{(x, y) \in X \times Y : f((x, y)) = g((x, y))\} = \{(x, x) : x \in X\}$  non appartiene a  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$  in quanto  $\{x : \{y : (x, y) \in F\} \in \mathcal{U}\} = \{x : \{x\} \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$  perchè  $\mathcal{U}$  è non principale.  $\square$

**Esercizio 0.4.** Siano dati due ultrafiltri  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  su due insiemi  $X$  ed  $Y$  rispettivamente, tali che  $|X| = |Y|$  e  $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$  e  $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ ; allora  $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ .

*Dimostrazione.* Se  $X$  ed  $Y$  sono finiti,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  sono principali e la tesi è ovvia. Altrimenti per ipotesi esistono due funzioni  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tali che  $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$  e  $g_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ . Allora  $(g \circ f)_*(\mathcal{U}) = g_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$  da cui, per l'esercizio precedente  $F_X := \{x \in X : g(f(x)) = x\} \in \mathcal{U}$ ; analogamente  $F_Y := \{y \in Y : f(g(y)) = y\} \in \mathcal{V}$ . Inoltre  $f|_{F_X} : F_X \rightarrow F_Y$  e  $g|_{F_Y} : F_Y \rightarrow F_X$  sono bigettive e sono una l'inversa dell'altra.

Se  $|X \setminus F_X| = |Y \setminus F_Y|$  prendo una qualunque bigezione  $\beta : X \setminus F_X \rightarrow Y \setminus F_Y$  e considero la bigezione  $\sigma : X \rightarrow Y$  data dall'unione delle due bigezioni  $\sigma|_{F_X} := f|_{F_X}$  e  $\sigma|_{X \setminus F_X} := \beta$ : è facile verificare che  $\sigma_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ .  
 Se invece  $|X \setminus F_X| \neq |Y \setminus F_Y|$  allora  $|F_X| = |F_Y| = |X| = |Y|$ : divido  $F_X$  in due insiemi entrambi di cardinalità  $|X|$  (e le loro immagini partizionano  $F_Y$  in due parti anch'esse di cardinalità  $|X|$ ) e considero quello  $\in \mathcal{U}$  dei due; definisco la bigezione  $\sigma$  come  $f$  sulla metà di  $F_X$  che appartiene a  $\mathcal{U}$  e come una bigezione qualunque da ciò che resta in  $X$  (di cardinalità  $|X|$ ) in ciò che resta in  $Y$  (sempre di cardinalità  $|X|$ ); è semplice verificare che  $\sigma_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ .  $\square$