Esercizi legati a teorema di Ramsey e regolarità per partizioni

Guglielmo Nocera

22 marzo 2015

Esercizio 1 (Lemma per la dimostrazione del Teorema di Ramsey)**.** *$\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Allora se $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ esiste $H \in \mathbb{N}$ infinito t.c. $[H]^3 \subset B$.*

Dim. Come nel caso $k = 2$, identifichiamo l'insieme delle terne con l'insieme $\{(a, b, c)|a < b < c\}$. Anzitutto $\hat{B} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 | B_{i,j} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Quindi $\hat{\hat{B}} = \{i \in \mathbb{N} | \hat{B}_i \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Scegliamo ora $h_1 \in \hat{\hat{B}}$, e $h_1 > h_1, h_2 \in \hat{\hat{B}} \cap \hat{B}_{h_1}$ (è possibile perché per scelta di h_1 anche $\hat{B}_{h_1} \in \mathcal{U}$, quindi l'intersezione è non vuota e infinita, cosicché è possibile prendere $h_2 > h_1$). Scegliamo ora $h_3 > h_2$ in $\hat{\hat{B}} \cap \hat{B}_{h_1} \cap \hat{B}_{h_2} \cap B_{h1,h2}$; è possibile farlo perché per scelta di h_1 e h_2 tutti i termini dell'intersezione appartengono ad $\mathcal{U}$. Abbiamo allora che:

- $h_3 \in \hat{\hat{B}} \Longrightarrow \hat{B}_{h_3} \in \mathcal{U}$
- $h_3 \in \hat{B}_{h_1} \Longrightarrow B_{h1,h3} \in \mathcal{U}$
- $h_3 \in \hat{B}_{h_2} \Longrightarrow B_{h2,h3} \in \mathcal{U}$
- $h_3 \in B_{h_1,h_2} \Longrightarrow (h_1, h_2, h_3) \in B$

Su questa base siamo dunque in grado di iterare la costruzione (si sceglie $h_4 \in \hat{\hat{B}} \cap \hat{B}_{h_1} \cap \hat{B}_{h_2} \cap \hat{B}_{h_3} \cap B_{h_1,h_2} \cap B_{h_1,h_3} \cap B_{h_2,h_3}$, etc.) ottenendo $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < h_4 \dots\}$. $\square$

NOTA: il caso $k > 3$ segue uno schema esattamente analogo. In tal modo il Teorema di Ramsey in versione infinita risulta dimostrato, dato che per ogni k l'insieme $[\mathbb{N}]^k$ si può identificare con l'insieme $\Delta_k^+ = \{(n_1, \dots, n_k)|n_1 < \cdots < n_k\}$ e si possono condurre gli stessi ragionamenti fatti nel caso $k = 2$ per dimostrare che esiste un colore C_i appartenente al prodotto tensoriale di k copie dell'ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$. Infatti come in quel caso basta dimostrare che $\Delta_k^+ \in \bigotimes_1^k \mathcal{U}$: proviamolo per induzione prendendo come passo base appunto $k = 2$ e come ipotesi induttiva $\Delta_{k-1}^+ \in \bigotimes_1^{k-1} \mathcal{U}$. Allora la sezione $(\Delta_k^+)_{n_1,\dots,n_{k-1}}$ è cofinita (dunque appartiene all'ultrafiltro $\mathcal{U}$) per ogni $(n_1, \dots, n_{k-1}) \in \Delta_{k-1}^+$. Poiché quest'ultimo insieme appartiene a $\bigotimes_1^{k-1} \mathcal{U}$ per ipotesi induttiva, dalla definizione di prodotto tensoriale si ha la tesi.

Esercizio 2. *Sia $(P, \leq)$ parzialmente ordinato e infinito. Allora esiste $X \subseteq P$ catena infinita oppure anti-catena infinita (ovvero $\forall x \neq x'$ in X vale $x \nleq x'$ e $x \ngeq x'$).*

Dim. Sia $N \subseteq P$ numerabile. Allora $[N]^2 = C \sqcup D$ dove

$$C = \{(x, y)|x \leq y \vee y \leq x\}$$

$$D = \{(x, y)|x \nleq y \wedge y \nleq x\}$$

Per il teorema di Ramsey esiste $H \subseteq N$ infinito t.c. $[H]^2 \subset D$, ovvero H e un'anticatena, oppure $[H]^2 \subset C$, ovvero H è totalmente ordinato, ovvero una catena infinita.

Definizione 1. *$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ chiusa per soprainsiemi si dice debolmente regolare per partizioni se $\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall\ X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste $F \in \mathcal{F}$ t.c. $F \subset C_i$, ovvero $C_i \in \mathcal{F}$, per qualche i.*

Definizione 2. *$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ chiusa per soprainsiemi si dice (fortemente) regolare per partizioni se $\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall\ C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r \in \mathcal{F}$ esiste $C_i \in \mathcal{F}$ per qualche i.*

Esercizio 3.

1) $\mathcal{F}$ è debolmente regolare per partizioni su $X \iff \exists\, \mathcal{U}$ ultrafiltro su X incluso in $\mathcal{F}$.

2) $\mathcal{F}$ è regolare per partizioni $\iff$ è unione di ultrafiltri su X.

<u>*Dim.*</u>

1)($\Longrightarrow$) Mostriamo anzitutto che $\mathcal{F}$ contiene il filtro di Fréchet su X oppure un ultrafiltro principale. Sia infatti F cofinito non contenuto in $\mathcal{F}$. La partizione formata da F e da tutti i punti non appartenenti a F rientra nell'ipotesi e dunque, poiché $F \notin \mathcal{F}$, esiste $x \in X, \{x\} \in \mathcal{F}$. Quindi poiché $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi contiene ultrafiltro principale associato ad x. Supponiamo invece che $\mathcal{F}$ contenga il filtro di Fréchet su X e dimostriamo che contiene un ultrafiltro che lo estende. Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ vale $A \in \mathcal{F} \vee A^c \in \mathcal{F}$ (basta considerare la partizione $X = A \sqcup A^c$). Supponiamo ad esempio che $A \in \mathcal{F}$, e aggiungiamo A e tutti i soprainsiemi al filtro di Fréchet. Ogni altra aggiunta potrà essere fatta in modo da non violare la proprietà di intersezione finita, dato che saremmo costretti a violarla se un soprainsieme di A non stesse in $\mathcal{F}$, ma ciò non è vero per ipotesi.

($\Longleftarrow$) Se $\mathcal{F}$ contiene un ultrafiltro, esso conterrà certamente lo spazio X come elemento. Dunque la tesi discende direttamente da una delle forme equivalenti della definizione di ultrafltro.

2)($\Longrightarrow$) Sia $F \in \mathcal{F}$. Certamente F esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su $\mathcal{F}$ per quanto dimostrato sopra e per l'ipotesi di ereditarietà, e certamente F appartiene a questo ultrafiltro. Estendiamo $\mathcal{U}$ a ultrafiltro su X aggiungendo tutti i soprainsiemi degli elementi di $\mathcal{U}$: la famiglia $\mathcal{U}'$ così ottenuta è banalmente ancora un filtro, ed è anche un ultrafiltro, dato che preso un qualunque $A \in \mathcal{P}(X)$ vale $A \cap F \in \mathcal{U} \vee A^c \cap F \in \mathcal{U}$, quindi $A \in \mathcal{U}' \vee A^c \in \mathcal{U}'$.

($\Longleftarrow$) Sia $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r \in \mathcal{F}$. Allora $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ è contenuto in un certo ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X, e pertanto esiste $C_i \in \mathcal{U} \subset \mathcal{F}$.

□