Funzioni $\mathcal{U}$-equivalenti

Gioacchino Antonelli

March 22, 2015

D'ora in poi, dato I un insieme di indici, tutte le funzioni che considererò saranno con dominio I a valori in I. Definisco $f \equiv_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \{i \in I | f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Inoltre, definisco $f_\star(\mathcal{U})$ l'ultrafiltro su I come segue: $A \in f_\star(\mathcal{U}) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$.

Esercizio 1: $f \equiv_{\mathcal{U}} g \Rightarrow f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U})$

Dimostrazione: Mostro che $f_\star(\mathcal{U}) \subseteq g_\star(\mathcal{U})$. In maniera del tutto analoga si mostrerà l'inclusione opposta e dunque la tesi.

Se $A \in f_\star(\mathcal{U})$ allora $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. Per ipotesi $X = \{i \in I | f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. E' chiaro allora che $g^{-1}(A) = \{i \in I | g(i) \in A\} \supseteq X \cap f^{-1}(A)$. Siccome i due insieme intersecati stanno in $\mathcal{U}$ anche la loro intersezione è in $\mathcal{U}$ e dunque anche $g^{-1}(A)$ che ne è un soprainsieme.

Do per noto il seguente risultato mostrato a lezione (Teorema dei 3 colori): Sia $f : I \to I$ una funzione. Esiste una 3-colorazione di I tale che, per ogni i, se $f(i) \neq i$, allora la coppia $\{i, f(i)\}$ non è monocromatica.

Esercizio 2: $f_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Leftrightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} id$

La freccia $\Leftarrow$ è una conseguenza dell'Esercizio 1. Per fare l'altra freccia, userò il Teorema dei 3 colori ragionando per assurdo. Suppongo dunque che f non sia $\mathcal{U}$-equivalente all'identità. Allora $A = \{i | f(i) \neq i\} \in \mathcal{U}$. Noto innanzitutto che A è non vuoto poiché $A \in \mathcal{U}$. Poi $f^{-1}(A) \subseteq A$. Infatti suppongo per assurdo che esista $x \in f^{-1}(A)$ ma $x \notin A$. Dunque $f(x) \in A$ mentre $x \notin A$. Ciò vorrebbe dire che $x \neq f(x)$ e dunque $x \in A$ per la stessa defnzione di A.

Considero, a questo punto, una 3-colorazione di I fornitami dal teorema dei 3 colori. Siccome la 3-colorazione su I ne induce una sua A e $A \in \mathcal{U}$, per una proprietà di ultrafiltro, esiste esattamente una componente di A monocromatica che è in $\mathcal{U}$. Sia X tale componente. Se $f^{-1}(X) = \emptyset$ allora chiaramente $f^{-1}(X) \notin \mathcal{U}$. Se invece $f^{-1}(X)$ fosse non vuoto, poiché $f^{-1}(A) \subseteq A$, avrei innanzitutto che $f^{-1}(X) \subseteq A$. Inoltre per come ho scelto la 3-colorazione, sicuramente $f^{-1}(X)$ avrebbe elementi che sono colorati diversamente da X. Difatti sia $x \in f^{-1}(X)$. Allora $f(x) \in X$ e $x \neq f(x)$ poiché $x \in A$ essendo $f^{-1}(X) \subseteq A$. Dunque $\{x, f(x)\}$ non è una coppia monocromatica e dunque x ha colore diverso da $f(x)$, che è in X. Dunque $f^{-1}(X) \notin \mathcal{U}$, perché è disgiunto da X (che invece è in $\mathcal{U}$) essendo colorato con colori diversi da quello usato nella componente monocromatica

Dunque $X \in \mathcal{U}$ e $f^{-1}(X) \notin \mathcal{U}$, ovvero $X \notin f_\star(\mathcal{U})$, e dunque $U \neq f_\star(\mathcal{U})$ che conduce a un assurdo.