Esercizio 12

Dimostrare che il principio di compattezza comb. I è equivalente al principio di compattezza comb. II

Soluzione

manca.

Esercizio 13

Dimostrare che:

1) $\mathcal{F}$ è wPR $\Leftrightarrow$ $\exists\,\mathcal{U}$ ultrafiltro su X t.c. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$

2) $\mathcal{F}$ è PR e chiuso per sopra insiemi $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X

Soluzione

1) $\Leftarrow$ Sia $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$; poiché $X \in \mathcal{U}$, allora $\exists i$ t.c. $C_i \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$.

$\Rightarrow$ Devo, in qualche modo "costruire" l'ultrafiltro voluto. Per questo ho bisogno di un filtro o di una famiglia con la FIP. Vedo che

$\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq X \mid F^c \notin \mathcal{F}\}$ ha la FIP, infatti: se $F_i^c \notin \mathcal{F}$ per $i=1,\dots,n$, allora

$\bigcap F_i = \emptyset \to (\bigcap F_i)^c = F_1^c \cup \dots \cup F_n^c = X$. Ma $\nexists i$ $F_i^c \in \mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{F}$ non sarebbe wPR, assurdo. Ora, sia $\mathcal{U}$ che estende $\{F \subseteq X \mid F^c \notin \mathcal{F}\} = \mathcal{F}_0$

Allora, se $G \in \mathcal{U}$ e $G \notin \mathcal{F} \to G^c \in \mathcal{F}_0 \to G^c \in \mathcal{U}$. Assurdo.

2) $\Leftarrow$ Sia $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, $F \in \mathcal{F}$ e $F = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$, allora $\exists i$ $F \in \mathcal{U}_i$ e quindi $\exists j$ t.c. $C_j \in \mathcal{U}_i \subseteq \bigcup \mathcal{U}_i = \mathcal{F}$.

$\Rightarrow$ Similmente a sopra, vedo che $\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq X \mid F^c \notin \mathcal{F}\}$ è un filtro:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$: infatti $X \in \mathcal{F}$, come si vede considerando la partizione $X = C_1$.
- $F, G \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}_0$, infatti $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c \notin \mathcal{F}$, in quanto se $F^c \cup G^c \in \mathcal{F}$ dovrebbe esistere $H \subseteq F^c$ o $H \subseteq G^c$, da cui $F^c \in \mathcal{F}$ o $G^c \in \mathcal{F}$.
- $F \in \mathcal{F}_0$ e $G \supseteq F \to G \in \mathcal{F}_0$: infatti se fosse $G^c \in \mathcal{F}$ avrei, per l'ipotesi di chiusura per soprainsieme, $F^c \in \mathcal{F}$.
- $F \in \mathcal{F}_0 \to F^c \notin \mathcal{F}_0$: se, per assurdo, $F^c \in \mathcal{F}_0 \to F \notin \mathcal{F}$ e allora $X = F \cup F^c$ renderebbe assurda l'ipotesi di $\mathcal{F}$ PR.

Vediamo quindi che posto $\mathcal{G} = \bigcup\{\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}_0 \mid \mathcal{U} \text{ ultrafiltro}\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Infatti se $F \in \mathcal{G}$, allora $\exists\,\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}_0$ t.c. $F \in \mathcal{U}$, quindi $F^c \notin \mathcal{U}$, da cui $F^c \notin \mathcal{F}_0$ ovvero $F \in \mathcal{F}$. D'altro canto, se $F \in \mathcal{F}$, allora $F^c \notin \mathcal{F}_0$, per cui $\exists\,\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}_0$ tale che $F \in \mathcal{U}$, quindi $F \in \mathcal{G}$.

Esercizio 15

Verificare che ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ è un campo e controllare che le operazioni siano ben definite.

Soluzione

Basta verificare che sto quozientando per un massimale. Sto mandando a 0 tutte le successioni τ tali che $0 \equiv_{\mathcal{U}} \tau$, ovvero tali che $\{n \mid \tau(n) = 0\} \in \mathcal{U}$. Ma per l'esercizio 2 questo è un ideale massimale di $Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ e quindi il quoziente è un campo.

Esercizio 16

Verificare che TFAE:

1) $\mathbb{F}$ è archimedeo
2) $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$
3) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$
4) Non esistono numeri infinitesimi: $\varepsilon \neq 0$

Soluzione

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Per assurdo sia $\xi \in \mathbb{F}$ un maggiorante di $\mathbb{N}$, allora $\forall n$ $n \cdot \frac{1}{\xi} < 1$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Sia ε infinitesimo e WLOG positivo, allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon > n$.

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Se, per assurdo, $\exists \varepsilon > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \cdot \varepsilon < 1$, allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} < 0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ Sia $\xi > 0$, $\xi \in \mathbb{F}$. Per densità $\exists$ $p, q \in \mathbb{N}$ t.c. $|\frac{p}{q} - \xi| < 1$. Ora, ho due casi:

a) $\frac{p}{q} > \xi \to p > \xi$
b) $\frac{p}{q} < \xi \to \frac{p}{q} + 1 > \xi \to p + 1 > \xi$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Sia $\xi \in \mathbb{F}$, $\xi > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Tra ξ e $\xi + \frac{1}{n}$ c'è un razionale: sia $q > n$ e sia $p = \min\{r \in \mathbb{N} \mid r > q \cdot \xi\}$, questo esiste per buon ordinamento di $\mathbb{N}$ e per la sua illimitatezza; allora $\frac{p}{q}$ è tra ξ e $\xi + \frac{1}{n}$.

Esercizio 17

Dimostrare che $\forall A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ con $|A| = \aleph_0$, esiste $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ tale che $\alpha > \sigma$ $\forall \sigma \in A$.

Soluzione

Sia $A = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots\}$. Definisco la successione $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$\alpha[i] = \sum_{j=1}^{i} |\sigma_j[i]| + 1$$

Allora $\{n \mid \alpha[n] > \sigma_i[n]\} = \{n \mid n \geq i\} \in \mathfrak{F}_r \subseteq \mathcal{U}$.

Esercizio 18

Dimostrare che $\frac{{}^*\mathbb{Q}_{fin}}{I} = \mathbb{R}$, dove ${}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, ${}^*\mathbb{Q}_{fin} = \{\xi \in {}^*\mathbb{Q} \mid \xi \text{ finito}\}$ e

$I = \{\varepsilon \in {}^*\mathbb{Q}_{fin} \mid \varepsilon$ è infinitesimo$\}$.

Soluzione

${}^*\mathbb{Q}_{fin}$ è un anello e I è un ideale massimale perché pure - tutti gli altri elementi sono invertibili. Quindi il quoziente sarà un campo. Ho un ordine indotto da $\mathbb{Q}$, quindi mi rimane da vedere che $\frac{{}^*\mathbb{Q}_{fin}}{I}$ è completo. Per farlo devo probabilmente immergere $\mathbb{R}$ in $\frac{{}^*\mathbb{Q}_{fin}}{I}$ ma, per ora, manca.

Esercizio 19

Nei casi in cui ha senso, verificare che

1) $st(\xi + \eta) = st(\xi) + st(\eta)$
2) $st(\xi \cdot \eta) = st(\xi) \cdot st(\eta)$
3) $st\left(\xi/\eta\right) = \frac{st(\xi)}{st(\eta)}$ se $\eta \not\sim 0$

Soluzione

manca.

Esercizio 20

$|{}^*\mathbb{N}| = c$

Soluzione

${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, quindi $|{}^*\mathbb{N}| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = c$. Voglio trovare una mappa iniettiva da $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{N}$. Sia $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $\varphi(x)[n] = \lfloor nx \rfloor$. Allora,

se $x \neq y$ ho $\varphi(x)[n] = \lfloor nx \rfloor \neq \lfloor ny \rfloor = \varphi(y)[n]$ per tutte le $n \geq \frac{1}{|x-y|}$,

infatti se $n \geq \frac{1}{|x-y|}$ ho $|nx - ny| \geq \left| \frac{x-y}{|x-y|} \right| = 1$, quindi $|\lfloor nx \rfloor - \lfloor ny \rfloor| \geq 1$.

Quindi $\{n \mid \varphi(x)[n] \neq \varphi(y)[n]\} \in \mathcal{U}$. Passando al quoziente rispetto ad $\mathcal{U}$

ottengo quindi $[\varphi(x)] \neq [\varphi(y)]$ e la funzione è dunque iniettiva.

Esercizio 21

1) ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$
2) ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$
3) ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$
4) ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$

Soluzione

manca.

Esercizio 22

Dimostrare che le definizioni di continuità, uniforme continuità e locale limitatezza date a lezione coincidono con quelle classiche.

Soluzione

manca.

Esercizio 23

$\operatorname{Card}({}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) > \aleph_0$

Soluzione

manca

Esercizio 25

Gli insiemi interni sono chiusi per complemento, unione e intersezione

Soluzione

Siano A, B interni, con $[\sigma] \in A \iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n\} \in \mathcal{U}$ e $[\tau] \in B \iff \{n \mid \tau[n] \in B_n\} \in \mathcal{U}$.

- A^c è interno, infatti $[\sigma] \in A^c \iff [\sigma] \notin A \iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n\} \notin \mathcal{U} \iff$

  $\iff \{n \mid \sigma[n] \notin A_n\} \in \mathcal{U} \iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n^c\} \in \mathcal{U}$.

- $A \cup B$ è interno, infatti $[\sigma] \in A \cup B \iff [\sigma] \in A \vee [\sigma] \in B \iff$

  $\iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n\} \in \mathcal{U} \vee \{n \mid \sigma[n] \in B_n\} \in \mathcal{U} \iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n \cup B_n\} \in \mathcal{U}$

  Per l'ultimo se e solo se:

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ è chiuso per sovrainsiemi

  $\boxed{\Leftarrow}$ se $\{n \mid \sigma[n] \in A_n\} \notin \mathcal{U}$ allora

  $X = \{n \mid \sigma[n] \notin A_n\} \cap \{n \mid \sigma[n] \in A_n \cup B_n\} \in \mathcal{U}$. Ma $\{n \mid \sigma[n] \in B_n\} \supseteq X$,

  quindi $\{n \mid \sigma[n] \in B_n\} \in \mathcal{U}$.

- $A \cap B$ è interno, infatti: $[\sigma] \in A \cap B \iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n\} \in \mathcal{U} \quad \wedge$

  $\{n \mid \sigma[n] \in B_n\} \in \mathcal{U} \iff \{n \mid \sigma[n] \in A_n \cap B_n\} \in \mathcal{U}$, dove l'ultimo se e solo se:

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ chiuso per intersezione

  $\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{U}$ chiuso per sovrainsiemi.

Esercizio 25

Dimostrare che:

- $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n \geq \ell \in \mathbb{R} \iff \exists \nu$ infinito t.e. $st(a_\nu) \geq \ell$
- $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \ell \iff \ell = \max\{st(a_\nu) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$

Soluzione

Manca.

Esercizio 26

1) $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \leq \mathcal{W}$

2) $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$, cioè esiste biiezione σ con $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$

Soluzione

1) Mi basta vedere che $g_*(f_*(\mathcal{U})) = (g \circ f)_*(\mathcal{U})$. Ma

$$A \in g_*(f_*(\mathcal{U})) \Leftrightarrow g^{-1}(A) \in f_*(\mathcal{U}) \Leftrightarrow f^{-1}g^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (fg)^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \in (g \circ f)_*(\mathcal{U})$$

2) manca.

Esercizio 27

$f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \iff \{n \mid f(n) = n\} \in \mathcal{U}$

Soluzione

$\boxed{\Leftarrow}$ Devo far vedere che $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$.

- $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap \{n \mid f(n) = n\} = \{n \mid f(n) \in A\} = f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$
- $f^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A) \cap \{n \mid f(n) = n\} = \{n \mid n \in A\} = A \in \mathcal{U}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro su X. Per assurdo sia $F = \{n \mid f(n) \neq n\} \in \mathcal{U}$. Poiché f potrebbe avere punti fissi non posso applicare il lemma dei tre colori a f. Sia $g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \in F \\ n+1 & \text{se } n \notin F \end{cases}$. Allora $\{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ perché contiene F e g è senza punti fissi. Allora esiste $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ tale che n e $g(n)$ non appartengono mai allo stesso colore. Ora $\exists!\, i$ t.c. $C_i \in \mathcal{U}$, quindi $g(C_i) \notin \mathcal{U}$, perché se no $g(C_i) \cap C_i = \emptyset \in \mathcal{U}$. Ora

$g^{-1}(g(C_i)) = C_i \in \mathcal{U} \Rightarrow g(C_i) \in g_*(\mathcal{U})$. Ma

$f^{-1}(g(C_i)) = \{n \mid f(n) \in g(C_i)\} \supseteq C_i \cap F \in \mathcal{U}$. Quindi

$g(C_i) \in f_*(\mathcal{U})$ e $\mathcal{U} \neq f_*(\mathcal{U})$.